



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
COLEGIADO DE MATEMÁTICA  
Licenciatura em Matemática  
UNIOESTE - *Campus de Cascavel*

---

EDUARDA PEREIRA DE ASSIS  
GABRIELA ARTINI DA SILVA  
GUILHERME GASPARINI LOVATTO  
NATALIA CRISTINA ARAÚJO TAQUES

**RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE  
ENSINO DE MATEMÁTICA:  
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I  
PROMAT**

---

CASCADEL

2019

EDUARDA PEREIRA DE ASSIS  
GABRIELA ARTINI DA SILVA  
GUILHERME GASPARINI LOVATTO  
NATÁLIA CRISTINA ARAÚJO TAQUES

**METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE  
MATEMÁTICA:  
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I  
PROMAT**

Relatório apresentado como requisito parcial da  
disciplina para aprovação.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Andréia Büttner Ciani

CASCADEL

2019

## **AGRADECIMENTOS**

Agradecemos primeiramente a nossa orientadora Andréia Büttner Ciani por ter nos auxiliado e orientado durante todo o PROMAT. Também a agradecemos por todo conhecimento repassado e por nos mostrar que um aluno não deve ser avaliado de forma a considerar o pensamento do aluno dentro da dicotomia do certo e errado.

Agradecemos a professora Arleni Elise Sella Langer por ter nos auxiliado durante o processo, ajudando na organização dos conteúdos trabalhados, dúvidas e acontecimentos (previstos e imprevistos), submetendo-se a disponibilizar a atenção necessária para que o PROMAT tivesse o melhor desenvolvimento possível.

Ao Colégio Estadual Marechal Castelo Branco e toda sua equipe que nos recebeu oferecendo auxílio para que pudéssemos desenvolver as atividades planejadas para o Dia da Matemática.

A todos os professores colaboradores envolvidos, que juntos trabalharam para tornar o desenvolvimento e conclusão do 1º semestre do PROMAT possível.

Os alunos que fizeram parte dessa etapa significativa em nossa carreira de formação para a docência, se dedicando nas aulas e enfrentando os desafios para estarem presentes em cada uma das aulas.

Agradecemos os nossos colegas por compartilharem suas vivências em sala de aula e auxiliarem para que fosse possível um desempenho maior em todas as atividades.

Agradecemos por último aos nossos familiares que fizeram possível a nossa chegada e conclusão de mais essa etapa.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Parte de Adib .....                   | 18 |
| Figura 2: Parte de Adib e Badih.....            | 18 |
| Figura 3: Parte de Adib, Badih e Abdul.....     | 18 |
| Figura 4: Divisão dos bombons .....             | 19 |
| Figura 5: Adição de frações I.....              | 20 |
| Figura 6: Adição de frações II .....            | 20 |
| Figura 7: Subtração de frações.....             | 21 |
| Figura 8: Divisão de frações I.....             | 22 |
| Figura 9: Divisão de frações II .....           | 22 |
| Figura 10: Razão entre áreas.....               | 37 |
| Figura 11: Mapa.....                            | 38 |
| Figura 12: Atividade escala .....               | 48 |
| Figura 13: Medição dos barbantes .....          | 49 |
| Figura 14: Quadro das proporções .....          | 50 |
| Figura 15: Dominó Regra de Três.....            | 61 |
| Figura 16: Área de polinômios .....             | 65 |
| Figura 17: Soma de polinômios .....             | 65 |
| Figura 18: Subtração de polinômios.....         | 66 |
| Figura 19: Representação 2x2 .....              | 67 |
| Figura 20: Representação 3x3 .....              | 67 |
| Figura 21: Representação $n \times n$ .....     | 68 |
| Figura 22: Representação $(2 \times 3)^2$ ..... | 68 |
| Figura 23: Atividade polinômios .....           | 76 |
| Figura 24: Atividade produtos notáveis .....    | 78 |
| Figura 25: Demonstração de Bhaskara .....       | 79 |
| Figura 26: Conjuntos Naturais.....              | 84 |
| Figura 27: Conjunto Inteiros.....               | 85 |
| Figura 28: Conjunto Racionais.....              | 85 |
| Figura 29: Conjunto Irracionais .....           | 86 |
| Figura 30: Conjunto Reais.....                  | 86 |
| Figura 31: Intervalo aberto .....               | 87 |
| Figura 32: Intervalo fechado .....              | 87 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 33: Intervalo semi-aberto.....                                           | 87  |
| Figura 34: Intervalo semi-fechado .....                                         | 87  |
| Figura 35: Intervalo A .....                                                    | 88  |
| Figura 36: Intervalo B .....                                                    | 88  |
| Figura 37: União de intervalos .....                                            | 88  |
| Figura 38: Intersecção de intervalos .....                                      | 88  |
| Figura 39: Diferença de intervalos .....                                        | 89  |
| Figura 40: Intervalos para jogo.....                                            | 89  |
| Figura 41: Exemplo jogo da memória.....                                         | 90  |
| Figura 42: Área do tecido .....                                                 | 105 |
| Figura 43: Representação tabular.....                                           | 107 |
| Figura 44: Representação gráfica.....                                           | 107 |
| Figura 45: Valor monetário .....                                                | 108 |
| Figura 46: Resolução de aluno.....                                              | 117 |
| Figura 47: Parábola .....                                                       | 120 |
| Figura 48: Gráfico correspondente à produtividade de uma linha de montagem..... | 121 |
| Figura 49: Gráficos GeoGebra .....                                              | 131 |
| Figura 50: Área do quadrado .....                                               | 137 |
| Figura 51: Decomposição do paralelogramo em retângulo .....                     | 137 |
| Figura 52: Decomposição do losango em retângulo.....                            | 137 |
| Figura 53: Decomposição do triângulo em retângulo .....                         | 138 |
| Figura 54: Decomposição do trapézio em triângulo .....                          | 138 |
| Figura 55: Planificação dos sólidos .....                                       | 145 |
| Figura 56: Ângulo reto.....                                                     | 149 |
| Figura 57: Ângulo agudo .....                                                   | 150 |
| Figura 58: Ângulo obtuso .....                                                  | 150 |
| Figura 59: Ângulo raso .....                                                    | 150 |
| Figura 60: Caso semelhança de triângulos.....                                   | 151 |
| Figura 61: Caso de não semelhança de triângulos.....                            | 151 |
| Figura 62: Material semelhança de triângulos .....                              | 152 |
| Figura 63: Altura da pirâmide .....                                             | 153 |
| Figura 64: Relações métricas no triângulo retângulo .....                       | 154 |
| Figura 65: Mostraçõ do Teorema de Pitágoras utilizando área .....               | 155 |
| Figura 66: Material de apoio semelhança de triângulos.....                      | 165 |

|                                                                                 |            |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Figura 67: Demonstração do teorema de Pitágoras feita por um aluno .....</b> | <b>166</b> |
| <b>Figura 68: Material área do círculo .....</b>                                | <b>170</b> |
| <b>Figura 69: Paralelepípedo.....</b>                                           | <b>171</b> |
| <b>Figura 70: Montagem do círculo .....</b>                                     | <b>178</b> |
| <b>Figura 71: Código do prisioneiro .....</b>                                   | <b>183</b> |
| <b>Figura 72: Caça-palavras .....</b>                                           | <b>185</b> |

## LISTA DE QUADROS

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Quadro 1: Estatística de inscritos por curso .....    | 24  |
| Quadro 2: Estatística de inscritos por curso II ..... | 26  |
| Quadro 3: Proporção dos barbantes .....               | 39  |
| Quadro 4: Brigadeiros .....                           | 40  |
| Quadro 5: Grandeza inversamente proporcional .....    | 41  |
| Quadro 6: Número de vendas.....                       | 53  |
| Quadro 7: Reservatório .....                          | 54  |
| Quadro 8: Teoria dos conjuntos .....                  | 84  |
| Quadro 9: Área após a lavagem .....                   | 105 |
| Quadro 10: Estudo da parábola .....                   | 123 |
| Quadro 11: Número de diagonais.....                   | 136 |
| Quadro 12: Comprimento da circunferência.....         | 169 |
| Quadro 13: Programação Dia da Matemática.....         | 187 |

## SUMÁRIO

|                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Lista de figuras.....                                                                                                                     | 3   |
| Lista de quadros.....                                                                                                                     | 6   |
| SUMÁRIO.....                                                                                                                              | 7   |
| 1. Introdução .....                                                                                                                       | 8   |
| 2. PROMAT.....                                                                                                                            | 9   |
| 2.1. Opção Teórica e Metodológica .....                                                                                                   | 10  |
| 2.2. Cronograma .....                                                                                                                     | 14  |
| 2.3. Módulo 1 – Frações, Razão e Proporção, Regra de Três, Polinômios e Equações .....                                                    | 15  |
| 2.3.1. Plano de aula do dia 13/04/2019.....                                                                                               | 15  |
| 2.3.1.1. Relatório .....                                                                                                                  | 32  |
| 2.3.2. Plano de aula do dia 27/04/2019.....                                                                                               | 35  |
| 2.3.2.1. Relatório .....                                                                                                                  | 47  |
| 2.3.3. Plano de aula do dia 04/05/2019.....                                                                                               | 52  |
| 2.3.3.1. Relatório .....                                                                                                                  | 60  |
| 2.3.4. Plano de aula do dia 11/05/2019.....                                                                                               | 63  |
| 2.3.4.1. Relatório .....                                                                                                                  | 76  |
| 2.4. Módulo 2 – Conjuntos Numéricos, Função Afim e Função Quadrática .....                                                                | 81  |
| 2.4.1. Plano de aula do dia 18/05/2019.....                                                                                               | 81  |
| 2.4.1.1. Relatório .....                                                                                                                  | 100 |
| 2.4.2. Plano de aula do dia 25/05/2019.....                                                                                               | 104 |
| 2.4.2.1. Relatório .....                                                                                                                  | 115 |
| 2.4.3. Plano de aula do dia 01/06/2019.....                                                                                               | 118 |
| 2.4.3.1. Relatório .....                                                                                                                  | 129 |
| 2.5. Módulo 3 – Decomposição dos Sólidos, Polígonos, Ângulos, Relações Métricas, Círculo, Circunferência, Paralelepípedo e Cilindro ..... | 133 |
| 2.5.1. Plano de aula do dia 08/06/2019.....                                                                                               | 133 |
| 2.5.1.1. Relatório .....                                                                                                                  | 145 |
| 2.5.2. Plano de aula do dia 15/06/2019.....                                                                                               | 148 |
| 2.5.2.1. Relatório .....                                                                                                                  | 164 |
| 2.5.3. Plano de aula do dia 29/06/2019.....                                                                                               | 168 |
| 2.5.3.1. Relatório .....                                                                                                                  | 177 |
| 2.6. Considerações .....                                                                                                                  | 181 |
| 3. Projeto Dia da Matemática .....                                                                                                        | 182 |
| 3.1. Planejamento dia da Matemática .....                                                                                                 | 182 |
| 3.2. Relatório Dia da Matemática .....                                                                                                    | 190 |

## 1. Introdução

Este Relatório contém uma descrição dos momentos que estivemos nos preparando e exercendo a prática docente. Mais especificamente, dois momentos se delimitaram: a preparação e docência no projeto denominado PROMAT e a preparação e execução do projeto denominado Dia da Matemática. A maioria das ações se desenvolveu e foi executada nas dependências da Unioeste, *campus* de Cascavel, sendo que o Dia da Matemática foi executado nas dependências do Colégio Estadual Marechal Castelo Branco – Ensino Fundamental, Médio e Normal.

No primeiro semestre de 2019, estivemos envolvidos, na maior parte do tempo, com a preparação e execução do PROMAT, do qual participamos como professores, sendo que o enfoque foi na Matemática do Ensino Fundamental. Buscamos, na medida do possível, trazer aos alunos maneiras de ensinar o conteúdo para além da exposição tradicional no quadro negro. Preparamos slides a fim de agilizar a exposição dos conteúdos, mas, principalmente para mostrar figuras e representações para auxiliar a compreensão dos conceitos e, trouxemos ainda, materiais manipuláveis e introduzimos alguns conceitos a partir de exemplos particulares antes da formalização. Ainda trouxemos questões envolvendo este nível de conteúdo e presentes em provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, de vestibulares e até em provas de concursos.

Apesar de alguns de nós já ter estado em situação de ensinar Matemática e, até mesmo, de ministrar aulas de Matemática, oficialmente, esta foi nossa primeira experiência de prática docente em nosso curso de Licenciatura em Matemática. O início e desenvolvimento desta prática veio carregada de expectativas de colocarmos em prática o que vínhamos aprendendo ao longo do curso. Assim, o PROMAT e o Dia da Matemática se configuraram em oportunidades para o nosso exercício docente.

## 2. PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – PROMAT, trata-se de um Projeto de Ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática que visa atender alunos da rede pública estadual de ensino, tanto do município de Cascavel, quanto dos municípios vizinhos interessados. O PROMAT tem por objetivo o entendimento de conteúdos matemáticos, de modo que promova o acesso e permanência de estudantes nas universidades públicas.

As aulas são ministradas por alunos estagiários do Curso de Licenciatura em Matemática, o primeiro semestre é conduzido por estudantes do Estágio Supervisionado I e o segundo semestre por estudantes do Estágio Supervisionado II. Todos os anos, no primeiro semestre, do qual fizemos parte como docentes, são abordados conteúdos de Matemática ensinados no Ensino Fundamental. No segundo semestre são abordados conteúdos matemáticos inerentes ao Ensino Médio.

As atividades são direcionadas aos estudantes concluintes de Ensino Médio preferencialmente, mas havendo vagas pessoas interessadas em aprender Matemática, da comunidade em geral, são bem-vindas. Essas atividades utilizadas no projeto, possuem metodologias apropriadas, referenciais teóricos para auxílio, materiais confeccionados pelos próprios alunos para execução de atividades e também utilização de tecnologias disponíveis, para que possamos proporcionar um vínculo entre o aluno e a matemática.

## 2.1. Opção Teórica e Metodológica

### 2.1.1. Avaliação

O processo avaliativo não se restringe apenas em “medir” ou verificar o “certo e errado”, mas implica em um julgamento de valor, que por sua vez resulta na tomada de decisões visando a melhoria no objeto sob avaliação (DALTO e BURIASCO, 2009). Para Abrantes (1995), Hadji (2001), Esteban (2002), Buriasco (2002; 2004) (apud DALTO e BURIASCO, 2009, p. 451) a “avaliação deve estar a serviço da ação pedagógica e deve ser também um mecanismo de regulação do processo educativo”.

Nesse sentido,

[...] para que a avaliação possa efetivamente ser utilizada como instrumento de regulação do processo de ensino e aprendizagem de matemática, talvez o primeiro passo seja a mudança na forma como os erros dos alunos são encarados (DALTO; BURIASCO, 2009, p.451 - 452).

Com isso, a análise da produção escrita leva em consideração que é necessário avaliar as dificuldades, olhar os pontos em comum, ver se os conceitos foram apresentados de forma clara para que houvesse a apropriação do conhecimento, reconhecer conhecimentos já existentes e em construção, além de perceber se existe dificuldade desde a leitura e interpretação até aspectos voltados para o raciocínio lógico. Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) centralizam suas análises em aspectos essenciais e específicos para cada situação, isto é, os caminhos escolhidos pelos estudantes para a resolução, quais conhecimentos matemáticos foram utilizados, erros e quais sua possível natureza. Segundo Borasi (1987 apud DALTO e BURIASCO, 2009, p. 452) a avaliação é uma oportunidade de explorar o desenvolvimento da matemática no conhecimento do estudante, e seus erros utilizados para diagnóstico e remediação, quando a utilização dos erros reside sobre o diagnóstico das causas que levam ao erro e sobre os mecanismos para a sua superação, e investigação quando os erros são utilizados como mecanismos motivacionais de investigação do conteúdo relacionado ao erro. Desta maneira o educador dará mais atenção a cada passo utilizada na resolução do problema proposto.

Durante nosso percurso pelo PROMAT, utilizamos as premissas da análise da produção escrita para avaliar nossa ação sobre o projeto e a maneira que os conhecimentos passados em aula estão sendo mobilizados em uma tarefa avaliativa, escolhida de maneira a abordar grande parte dos conteúdos trabalhados em sala de aula. Esta tarefa foi entregue aos

alunos nos últimos minutos de cada aula, pedíamos que tentassem resolver sem consulta e que não precisaria dispor de seu nome na tarefa, além disso, explicitamos aos alunos que esta última tarefa seria utilizada para retomar conceitos matemáticos na aula seguinte em que eles tivessem maior dificuldade, ou seja, foram dados feedbacks aos alunos sobre estas tarefas. Entretanto, deixamos claro aos alunos que esta tarefa não era uma avaliação onde iríamos emitir uma nota ou “medi-lo” através de sua produção escrita em cada tarefa.

As tarefas avaliativas então nos apêndices de cada plano de aula e a análise da produção escrita de cada uma constam nos relatórios de cada aula, nestas análises realizamos algumas inferências, que neste caso é algo que parece que o aluno realizou, pois aparentemente em sua produção há vestígios de que tal procedimento foi utilizado, mas não podemos dizer que o aluno de fato teve a intenção de realizar determinados procedimentos, então podemos inferir ou comentar sobre este procedimento.

## Referências

DALTO, Jader Otavio; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Problema proposto ou problema resolvido**: qual a diferença? Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 449-461, 2009

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; CIANI, Andréia Büttner. **Avaliação como Prática de Investigação** (alguns apontamentos). BOLEMA, v. 33, p. 69-96, 2009.

### 2.1.2. Materiais manipuláveis e jogos

O uso de jogos e materiais manipuláveis em sala de aula complementam o ensino tradicional baseado apenas no quadro, giz e livro didático, trazendo um aspecto mais prático e lúdico, principalmente para aulas de um assunto tão abstrato quanto a Matemática. Ainda, segundo Smole *et al* (2008), esses recursos implicam numa mudança significativa no ensino e na aprendizagem de Matemática, modificando o método centrado nos livros didáticos e nos exercícios padronizados, possibilitando uma interação maior entre os alunos, os docentes e o material abordado, tornando a compreensão dos conteúdos da disciplina mais fáceis.

Um dos obstáculos encontrados quando se trata de utilizar material manipulável no ambiente educacional é a resistência dos próprios professores. Muitas vezes, isso ocorre devido à falta de conhecimento sobre o uso do material ou à falta de condições adequadas de trabalho. Referente às últimas, citamos aqui as classes superlotadas, a falta desses materiais, os curtos tempos das aulas e da preparação e a grande quantidade de conteúdo a ser vencido em um curto período de tempo, dentre outros.

No entanto, é preciso levar em conta a necessidade da utilização criteriosa do material. Nacarato (2005) critica o uso inadequado dos materiais manipuláveis, pois esses são apenas utilizados para apresentar uma noção do conteúdo proposto e após isso são esquecidos, como consequência reforçando a noção dos materiais manipuláveis e dos jogos como um passatempo.

O autor salienta que o problema não está no uso dos materiais manipuláveis, já que sua importância é indiscutível, mas que é necessário utilizá-los de maneira apropriada. Ainda reforça que para obter êxito no processo de ensino é imprescindível que os educadores levem em consideração diferentes tendências educacionais para o ensino da matemática, não tendo como único foco apenas uma.

Considerando os problemas citados anteriormente ao trabalharmos com esses recursos durante o PROMAT buscamos prevê-los e solucioná-los, levando em conta as condições físicas da sala de aula, o número de alunos por encontro e a organização em grupos (individual, duplas, trios e quartetos), o tempo de cada encontro para possibilitar a aprendizagem e reflexão sobre cada um dos materiais manipuláveis.

Uma alternativa eficaz durante a utilização dos materiais e jogos foi o incentivo aos alunos a realizarem registros das atividades, por exemplo, ao utilizarmos o Dominó de Proporções, entregamos junto ao kit do jogo, um gabarito para completarem com as questões do jogo, assim facilitando o andamento da atividade e permitindo que os alunos obtivessem anotações pertinentes a aula.

Durante o andamento dessa atividade observamos a interação dos alunos com o material disponibilizado. Em primeiro momento tiveram dúvidas com relação ao conteúdo proposto, mas no decorrer do jogo sanaram suas dúvidas e conseguiram concluir o desafio apresentado.

Ao trabalharmos os jogos no PROMAT, como o já referido, pensamos na adaptação de jogos populares, para equilibrar o tempo da realização do jogo durante aula, não sendo necessário a apresentação detalhada do modo de jogar, pois as regras já são conhecidas, permitindo o melhor aproveitamento da aula.

Outro material também utilizado no PROMAT foram barbantes no conteúdo de proporcionalidade, que possibilitaram trabalhar um conceito matemático através de material acessível e viável, sendo uma ferramenta que facilitou a compreensão do conteúdo.

Dessa forma, salientamos a importância do uso adequado desses recursos em sala de aula para auxiliar no ensino e a aprendizagem, para tanto, é necessário que os professores busquem conhecer e fundamentar os materiais que serão utilizados em sala de aula, salientando que esses recursos devem ser utilizados em todas as faixas de escolaridade, inclusive no ensino médio.

## **Referências**

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no Concreto**. Disponível em: <<https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/76/43>>. Acesso em: 19 jul. 2019.

SMOLE, Kátia Stocco et al. **Cadernos do Mathema: Jogos de Matemática de 1º a 3º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

## 2.2. Cronograma

| <b>Encontro</b> | <b>Data</b> | <b>Conteúdos</b>                                   |
|-----------------|-------------|----------------------------------------------------|
| 1               | 13/04       | Fração, decimal e porcentagem                      |
| 2               | 27/04       | Razão e proporção                                  |
| 3               | 04/05       | Regra de três                                      |
| 4               | 11/05       | Polinômios e equações                              |
| 5               | 18/05       | Conjuntos Numéricos e introdução de funções        |
| 6               | 25/05       | Função afim                                        |
| 7               | 01/06       | Função quadrática                                  |
| 8               | 08/06       | Decomposição dos sólidos e polígonos               |
| 9               | 15/06       | Ângulos e relações métricas                        |
| 10              | 29/06       | Círculo, circunferência, paralelepípedo e cilindro |

## **2.3. Módulo 1 – Frações, Razão e Proporção, Regra de Três, Polinômios e Equações**

### **2.3.1. Plano de aula do dia 13/04/2019**

#### **PROMAT – 1º ENCONTRO 13/04/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Apresentar-se e conhecer os participantes do ponto de vista pessoal e do conhecimento matemático. Inserir os participantes em tarefas para a compreensão da utilização, e de suas operações, de números racionais em situações problemas e questões escolares.

##### **Objetivos Específicos:**

Apresentar-nos e conhecê-los por meio de uma dinâmica de apresentação.

Apresentar aos participantes a proposta do PROMAT, os horários, os dias de encontros e os conteúdos que serão priorizados.

Diagnosticar os conhecimentos matemáticos prévios dos participantes e introduzi-los na perspectiva da avaliação da aprendizagem formativa.

Romper com a prática de aplicação de códigos e regras sem justificção fundamentada e inseri-los na lógica das demonstrações matemáticas por meio da construção das estruturas e conceitos por meio do encadeamento lógico.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

##### **Conteúdos:**

Números racionais em suas formas fracionárias e decimais bem como as transformações de uma forma a outra, bem como suas operações.

**Recursos Didáticos:**

Ampulheta, quadro, giz, projetor e placas de EVA.

**Encaminhamento metodológico:****1. Dinâmica de apresentação**

Visando uma apresentação e o estabelecimento de uma interação e bom relacionamento professor-alunos, faremos uma dinâmica de apresentação pautada em algumas perguntas como a idade do aluno, escolaridade e objetivos almejados com a sua participação no PROMAT. Para isso, será usada uma ampulheta com tempo de 20 segundos, a qual servirá para estipular e controlar o limite máximo para a apresentação de cada participante. O ideal é que cada um aproveite o tempo para discorrer sobre si, sua idade, a cidade que reside, seu trabalho e seus objetivos, ou algo mais que julgue relevante expor sobre sua pessoa ou sobre o seu relacionamento com a Matemática.

Ainda faremos uma breve apresentação nossa, estagiários, aos participantes do PROMAT, Colocaremos para eles os objetivos, as datas, os horários e os conteúdos que serão abordados no transcorrer dos encontros.

**2. Avaliação diagnóstica**

A avaliação diagnóstica será mediada pelo jogo Show do Milhão, um jogo de perguntas e respostas, o qual será organizado conforme segue.

Os alunos estarão organizados em duplas, pré-estabelecidas na dinâmica de apresentação. Explicaremos que o jogo será composto por 15 questões, sendo disponibilizado 3 minutos para a resolução de cada questão. Todas as duplas terão as mesmas questões e o mesmo tempo para resolver.

Cada dupla receberá uma folha com instruções do jogo, também, deverão usar a folha para anotações e desenvolvimento das questões. No final de cada questão, eles deverão marcar a facilidade ou dificuldade que eles sentiram para a resolução daquela questão, podendo ser classificada como: fácil, médio ou difícil. Cada grupo terá a opção de pedir auxílio 3 vezes, por meio de três plaquinhas, cada uma correspondente a um professor, assim que a plaquinha for levantada, o professor correspondente poderá dar uma dica aos alunos para ajudá-los.

Utilizaremos o projetor para a exposição das questões, assim que o tempo acabar, os alunos serão avisados e seguiremos para a próxima questão.

No final das atividades, os alunos serão parabenizados e deixaremos o resultado das questões a serem comentadas na próxima aula, recolhendo as anotações para análise.

### 3. Problema dos camelos

Este problema foi retirado do livro de Malba Tahan intitulado O Homem que Calculava. Apresentaremos o problema utilizando um vídeo da série Matemática na Escola. O vídeo aborda três situações problemas, no entanto utilizaremos apenas o problema dos 35 camelos, as demais partes do vídeo serão retiradas. No vídeo é apresentado o problema, logo após realizado uma pausa para explicar sobre heranças e em seguida é mostrado a solução proposta pelo arquiteto Mussaraf.

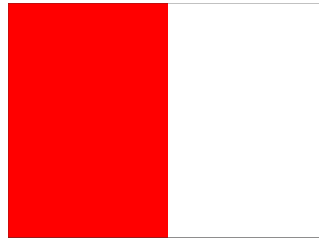
O problema é o seguinte: O pai de Abdul, um rico comerciante, deixou 35 camelos para serem divididos entre os três irmãos, sendo que o mais velho Adib receberá a metade, o filho do meio Badih receberá um terço e Abdul, o filho caçula receberá um nono dos camelos.

Apresentaremos o problema por meio do vídeo disponibilizado pela Unicamp e questionaremos conduzindo os alunos para expressarem um encaminhamento de solução para o problema. Eles serão estimulado e auxiliados no cálculo e na interpretação do significado de metade, um meio,  $\frac{1}{2}$ , um terço,  $\frac{1}{3}$  e de um nono,  $\frac{1}{9}$ , do total da herança, no caso, 35 camelos.

Lembraremos que não é possível fracionar nenhum animal para realização da divisão entre os irmãos. Deixaremos um tempo para eles analisarem e buscarem a solução do problema. Iremos auxiliar e responder os questionamentos que surgirem.

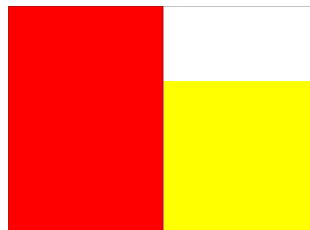
Diante da impossibilidade de uma solução razoável, seguiremos com o vídeo a fim de que Beremiz apresente a sua proposta de resolução que envolve a doação de um camelo aos irmãos, resultando assim, em 36 camelos. Novamente, os participantes serão estimulados a calcularem a metade de um terço e um nono de 36. Obtendo as respectivas respostas: 18, 12 e 4. O vídeo será retomado, no qual Beremiz adverte que somados 18, 12 e 4 resultam em 34. A pergunta lançada agora à turma é: como é possível sobrar um camelo?

No sentido de condução do pensamento para a abordagem e desenharemos, no quadro negro, uma figura retangular para representar o total dos camelos a serem divididos entre os irmãos. A Figura 1 representa, em vermelho, a parte dos camelos destinada a Adib,  $\frac{1}{2}$ , pelo desejo do pai.

**Figura 1: Parte de Adib**

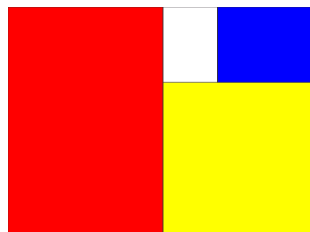
**Fonte:** Acervo dos autores.

A Figura 2 ilustra que acrescentaremos a representação da parte dos camelos do segundo irmão mencionado no testamento, Badih, o qual deve herdar, segundo a vontade de seu pai,  $\frac{1}{3}$  dos camelos. A parte de Badih será representada, na Figura 2, pela cor amarelo.

**Figura 2: Parte de Adib e Badih**

**Fonte:** Acervo dos autores.

Na Figura 3 são mantidas representadas as partes que cabem aos dois primeiros irmãos e, finalmente, em azul, aparece representada a parte, de  $\frac{1}{9}$ , que cabe ao terceiro irmão, Abdul. Lembrando que a divisão dos camelos obedece a vontade do pai destes irmãos. A Figura 3 representa a parte de cada um por uma cor, restando uma parte em branco do inteiro.

**Figura 3: Parte de Adib, Badih e Abdul**

**Fonte:** Acervo dos autores.

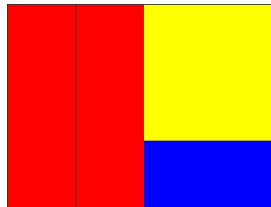
Perguntaremos por que temos uma região não preenchida na Figura 3 e o que representa. Esperamos conduzi-los à percepção de que nem todos os camelos foram distribuídos pela

divisão proposta pelo pai. Mostraremos que utilizamos uma figura com as dimensões 6x6, logo temos 36 quadrados que correspondem aos camelos, utilizando cada quadradinho para representar um camelo. Realizaremos então a contagem para descobrir a quantidade de camelos que cada filho recebeu e qual a quantidade que sobrou. Como resolução do problema teremos 18 camelos para Adib, 12 camelos para Badih e 4 camelos para Abdul.

Sugeriremos que assistam à solução de Mussaraf e aos demais problemas propostos no vídeo.

Lançaremos a seguinte questão: suponha que nós queiramos dividir uma dúzia de bombons para três alunos, apenas 3 e estabelecemos o seguinte critério: o mais dedicado receberá  $\frac{1}{2}$  de todos os bombons, o dedicado medianamente receberá  $\frac{1}{3}$  e o mais relaxado receberá apenas  $\frac{1}{6}$ . Quem receberá mais e quem receberá menos? Colocaremos no quadro  $\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ . Os alunos apresentarão as quantidades e perguntaremos se, neste caso sobra algum bombom. Rapidamente construiremos na lousa um retângulo com 12 quadradinhos, conforme ilustra a Figura 4.

**Figura 4: Divisão dos bombons**



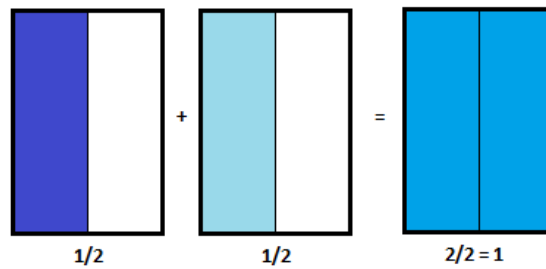
**Fonte:** Acervo dos autores

#### 4. Operações com frações

Consideraremos que os alunos possuem conhecimento para realizar a operação de adição entre duas frações com denominadores iguais, apenas lembraremos de forma mais intuitiva e construtiva utilizando as frações representadas em imagens.

##### **Exemplo 1:**

Figura 5: Adição de frações I

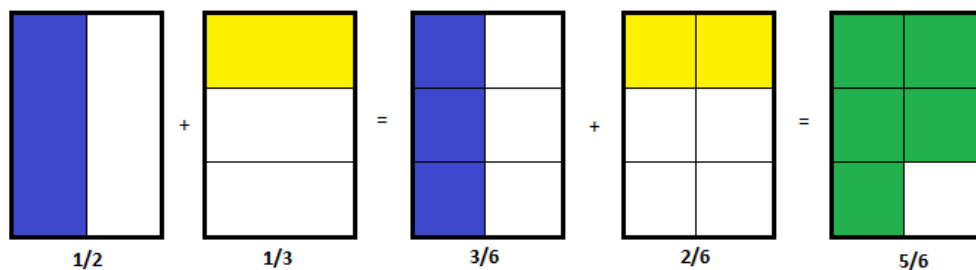


Fonte: Acervo dos autores.

Utilizaremos também um exemplo com denominadores diferentes, e através dele mostraremos que é utilizada a equivalência para fazer a soma. Para isso mencionaremos a necessidade de encontrar as frações equivalentes de cada fração pertencente a soma, donde essas frações equivalentes precisam ter denominadores iguais. Após encontrá-las notamos que voltamos para a soma com denominadores iguais e assim utilizamos o método mencionado anteriormente.

### Exemplo 2:

Figura 6: Adição de frações II



Fonte: Acervo dos autores.

Depois dos exemplos, definiremos as operações com frações de uma forma geral.

### Adição:

- Frações com denominadores iguais: Dada duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{b}$  temos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

- Frações com denominadores diferentes: Dadas duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  temos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

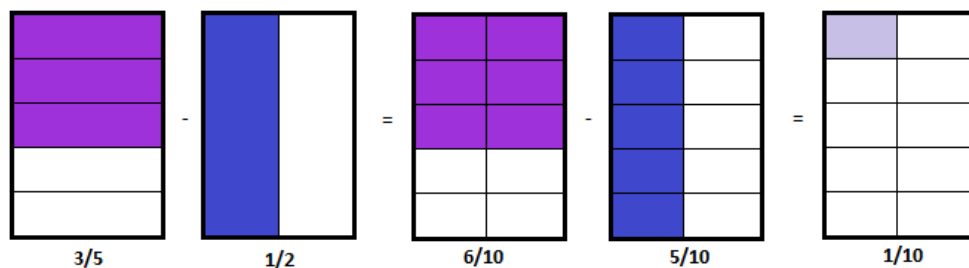
Tendo essas definições formalizadas relacionaremos esse método de encontrar os equivalentes com o de tirar o Mínimo Múltiplo Comum - MMC dos denominadores das frações.

### Subtração:

Exemplo:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{6 + 5}{10} = \frac{1}{10}$$

Figura 7: Subtração de frações



Fonte: Acervo dos autores.

Mostrando que o processo da subtração é idêntico a soma, formalizaremos com a definição.

- Frações com denominadores iguais: Dada duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{b}$  temos que

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$$

- Frações com denominadores diferentes: Dadas duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  temos

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

### Multiplicação:

Explicaremos que quando se tem uma multiplicação entre duas frações o método a utilizar é o de multiplicar os numeradores e denominadores, respectivamente. Para fixar melhor esse método passaremos um exemplo no quadro.

Tomando duas frações  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{2}$  temos  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Formalizaremos definindo multiplicação de frações.

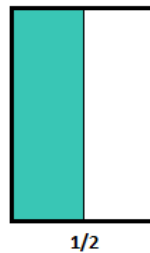
Definição: Dada duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , então  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ .

Mencionaremos, tendo  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ ,  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$  a pergunta que uma multiplicação faz é a seguinte: “O que é  $\frac{a}{b}$  de  $\frac{c}{d}$ ? ou seja,  $\frac{a}{b}$  de  $\frac{c}{d}$  representa qual parte do inteiro?”

### Divisão:

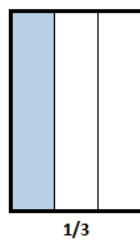
Tomando duas frações como exemplo trabalharemos com elas representadas com imagens da seguinte forma:

**Figura 8: Divisão de frações I**



**Fonte:** Acervo dos autores.

**Figura 9: Divisão de frações II**



**Fonte:** Acervo dos autores.

Se temos duas frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$  lê-se:

Quantas vezes  $\frac{1}{3}$  está em  $\frac{1}{2}$ ? ou seja, quantas vezes  $\frac{1}{2}$  contém  $\frac{1}{3}$ ?

Logo podemos observar que temos 1 inteiro de  $\frac{1}{3}$  mais metade dele em  $\frac{1}{2}$ . Então  $\frac{1}{3}$  está em  $\frac{1}{2}, \left(1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right)$  vezes. Concluimos assim que,  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ . Formalizaremos definindo divisão de frações.

Definição: Dadas duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  tem-se que  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$ .

Podemos dizer de forma geral que se temos duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , lê-se  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$  da seguinte forma: Quantas vezes  $\frac{c}{d}$  está em  $\frac{a}{b}$ ? Ou seja, quantas vezes  $\frac{a}{b}$  contém  $\frac{c}{d}$ ? O resultado da divisão é a resposta para essa pergunta.

Depois disso, mostraremos que a divisão entre duas frações é uma multiplicação, donde uma fração é multiplicada pelo inverso da outra.

### Potenciação:

Definição: Dada uma fração  $\frac{a}{b}$ , têm-se que  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Nessa propriedade apenas passaremos a definição e faremos um exemplo no quadro negro.

## 5. Problema do vestibular

Este problema refere-se à relação candidato-vaga do Vestibular da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste de 2019. Do site da Unioeste retiramos os dados que compõe o Quadro 1. Antes de apresentar os dados do Quadro 1, vamos levar o aluno a um pensamento intuitivo sobre o que é concorrência e a chance conquistar uma vaga. Para isso, vamos pedir para que pensem em um concurso onde há 50 vagas e 100 inscritos, de maneira intuitiva podemos chegar que a chance de entrar em uma vaga é de 50%, e que podemos ver isso representado na forma fracionária, isto é 50/100, além disso, ao se pensar em porcentagem, a própria palavra porcentagem traz a ideia de que é algo dividido por cem. Então, ao encontrar o quociente de  $\frac{50}{100}$  teremos 0,5 que ao multiplicar por 100 temos a porcentagem encontrada intuitivamente em primeiro momento. Posteriormente, por meio da equivalência de frações, iremos simplificar  $\frac{50}{100}$  e chegar a  $\frac{1}{2}$ , encontrando o quociente de  $\frac{1}{2}$  teremos 0,5 que é 50%.

Com isso, queremos mostrar que para encontrar a porcentagem, ou a probabilidade de conseguir uma vaga, basta encontrar o quociente entre o número de vagas e o número de inscritos.

Adiante, perguntaremos aos alunos qual seria a chance em porcentagem para uma vaga caso fossem 25 vagas para 100 inscritos. Deixaremos que os alunos reflitam sobre essa nova situação, mas iremos acompanharemos os raciocínios e mediremos quando necessário. Após isso, utilizando os mesmos 100 inscritos e as 25 vagas, lançaremos a questão para eles do que significa a fração  $\frac{100}{25}$ . Vamos aguardar um período para ver se os alunos compreendem que ao dividir  $\frac{100}{25}$  encontrarão a quantidade de inscritos por vaga. Caso não consigam, vamos perguntar sobre o que significa a fração e, neste caso, a quantidade de inscritos sobre o número de vagas, sendo que o resultado será taxa que representa os inscritos pelo número de vagas.

**Quadro 1: Estatística de inscritos por curso**

| <b>Estatística de Inscritos por curso</b> |       |                    |             |                       |
|-------------------------------------------|-------|--------------------|-------------|-----------------------|
| Curso                                     | Vagas | Total de Inscritos | Porcentagem | Concorrência por vaga |
| Administração noturno                     | 26    | 241                |             |                       |
| Ciência da Computação integral            | 20    | 105                |             |                       |
| Ciências Biológicas Bacharelado/Integral  | 20    | 93                 |             |                       |
| Ciências Biológicas Licenciatura/Noturno  | 20    | 86                 |             |                       |
| Ciências Contábeis/Noturno                | 20    | 193                |             |                       |
| Ciências Econômicas/Noturno               | 26    | 119                |             |                       |
| Enfermagem/Integral                       | 20    | 223                |             |                       |
| Engenharia Agrícola/Integral              | 20    | 69                 |             |                       |
| Engenharia Civil/Integral                 | 20    | 277                |             |                       |
| Farmácia/Integral                         | 20    | 156                |             |                       |
| Fisioterapia/Integral                     | 20    | 267                |             |                       |
| Letras - Português/Espanhol/Matutino      | 8     | 18                 |             |                       |

|                                      |    |      |  |  |
|--------------------------------------|----|------|--|--|
| Letras - Português/Inglês/Matutino   | 10 | 72   |  |  |
| Letras - Português/Italiano/Matutino | 8  | 17   |  |  |
| Matemática/Noturno                   | 20 | 64   |  |  |
| Medicina/Integral                    | 20 | 3161 |  |  |
| Odontologia/Integral                 | 20 | 519  |  |  |
| Pedagogia/Matutino                   | 20 | 61   |  |  |
| Pedagogia/Noturno                    | 20 | 164  |  |  |

**Fonte:** Adaptado de <<https://www5.unioeste.br/portalunioeste/>>

Utilizaremos a relação dos cursos de graduação do *Campus* de Cascavel, o objetivo é compreender a maneira como é calculada a concorrência de um curso e levar aos alunos dados reais para que estejam diante do que terão que enfrentar caso desejam ingressar na Unioeste. Como no problema dos camelos foi trabalhado com frações, no problema do vestibular utilizaremos as frações para podermos levar o aluno a refletir sobre decimais e porcentagem, e por fim entender a relação entre os três assuntos: fração, decimal e porcentagem.

A partir das duas primeiras colunas do Quadro 1, solicitaremos aos alunos que encontrarem a chance em porcentagem do curso de Administração, sempre colhendo sugestões dos alunos e registrando no quadro e ouvindo os alunos de como devemos proceder. Então, teremos  $\frac{26}{241}$ , como havíamos mostrado que ao encontrar o quociente de (vaga/inscritos) obtemos a porcentagem, faremos da mesma maneira para este caso, isto é, temos que a porcentagem é de aproximadamente 0,10 ou ainda 10%. Além disso, vamos encontrar a quantidade de inscritos por vaga. Após isso, pediremos que escolham um curso e calculem a porcentagem e a quantidade de inscritos por vaga, completando o Quadro 1. Para que possam verificar suas respostas iremos apresentar o Quadro 2. Caso alguém não consiga concluir os cálculos, iremos auxiliar no raciocínio.

**Quadro 2: Estatística de inscritos por curso II**

| <b>Estatística de Inscritos por curso</b> |       |                    |             |                       |
|-------------------------------------------|-------|--------------------|-------------|-----------------------|
| Curso                                     | Vagas | Total de Inscritos | Porcentagem | Concorrência Por vaga |
|                                           |       |                    |             |                       |
| Administração noturno                     | 26    | 241                | 10%         | 9,27                  |
| Ciência da Computação integral            | 20    | 105                | 19%         | 5,25                  |
| Ciências Biológicas Bacharelado/Integral  | 20    | 93                 | 21%         | 4,65                  |
| Ciência Biológicas Licenciatura/Noturno   | 20    | 86                 | 24%         | 4,3                   |
| Ciências Contábeis/Noturno                | 20    | 193                | 10%         | 9,65                  |
| Ciências Econômicas/Noturno               | 26    | 119                | 21%         | 4,58                  |
| Enfermagem/Integral                       | 20    | 223                | 8,96%       | 11,15                 |
| Engenharia Agrícola/Integral              | 20    | 69                 | 28%         | 3,45                  |
| Engenharia Civil/Integral                 | 20    | 277                | 7,22%       | 13,85                 |
| Farmácia/Integral                         | 20    | 156                | 12%         | 7,8                   |
| Fisioterapia/Integral                     | 20    | 267                | 7,49%       | 13,35                 |
| Letras Português/Espanhol/Matutino        | 8     | 18                 | 44%         | 2,25                  |
| Letras - Português/Inglês/Matutino        | 10    | 72                 | 13%         | 7,2                   |
| Letras - Português/Italiano/Matutino      | 8     | 17                 | 47%         | 2,13                  |
| Matemática/Noturno                        | 20    | 64                 | 31%         | 3,2                   |
| Medicina/Integral                         | 20    | 3161               | 0,63%       | 158,05                |
| Odontologia/Integral                      | 20    | 519                | 3,85%       | 25,95                 |
| Pedagogia/Matutino                        | 20    | 61                 | 32%         | 3,05                  |
| Pedagogia/Noturno                         | 20    | 164                | 12%         | 8,2                   |

**Fonte:** Adaptado de <<https://www5.unioeste.br/portalunioeste/>>.

Iremos calcular com os alunos porcentagem sobre valores diversos e porcentagem sobre porcentagem, dando exemplos e efetuando as operações manualmente para estimular e relembrar as operações fundamentais. Além disso, utilizamos um problema que envolve o conceito de porcentagem: Uma casa ao ser comprada à vista há um desconto de 10%. O valor da casa à vista é R\$ 135.000,00. Qual o valor original da casa, sem o desconto? Este problema tem por intuito de mostrar para o aluno que se for descontado uma porcentagem de um determinado valor e depois calcular a mesma porcentagem para o valor obtido, não volta ao valor original.

## **6. Lista de Exercícios**

Na lista de exercícios (Apêndice I) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também será abordado questões complementares de ENEM, vestibular e concurso. Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade. Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extra.

### **Avaliação:**

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes.

Escolhemos uma questão da lista que abordasse noções de porcentagem e fração, para ser recolhida para avaliação dos conteúdos abordados em aula. A questão escolhida está no Apêndice II.

### **Referências**

BARROSO, J. M. **Matemática, construção e significado**. São Paulo: Moderna, 2008.

CALSSAVARA, C. R. (Coord.). **PROMAT**. Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Primeira Fase e Segunda Fase. Projeto de Ensino. Cascavel: UNIOESTE/CCET/Colegiado de Matemática, 1º semestre de 2011. (Documento não publicado).

FILHO, B. B; SILVA, C. X. da. **Matemática**. São Paulo: FTD, 2000, volume único.

GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**, 6º ano, São Paulo: FTD, 2009.

PAIVA, M. **Matemática**. 2.ed., São Paulo: Moderna, 2003, volume único.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. 79.ed., Rio de Janeiro: Record, 2010.

### Apêndice I

|                                                                                                                                                                                                                             |                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
|  <div style="text-align: center;"> <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br/> <b>PROMAT 2019 - 1º Encontro</b> </div> |                         |
| <b>NOME:</b>                                                                                                                                                                                                                | <b>DATA: 13/04/2019</b> |

“Não ensino meus alunos. Crio a condição para que aprendam.”

- Albert Einstein

1) Resolva as operações:

a)  $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$

b)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}$

c)  $\left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{3}$

d)  $\frac{3}{7} \div \frac{1}{2}$

2) João Carlos é operário e seu salário é de apenas 520 reais por mês. Gasta  $\frac{1}{4}$  com aluguel e  $\frac{2}{5}$  com alimentação da família. Esse mês ele teve uma despesa extra,  $\frac{3}{8}$  do seu salário foram gastos com remédios. Sobrou dinheiro?

3) Em uma massa de pizza que rende 8 pedaços se utiliza os seguintes ingredientes: 2  $\frac{1}{2}$  de xícara de farinha de trigo, 1 colher (sopa) de fermento para pão,  $\frac{3}{4}$  de xícara de leite morno,  $\frac{1}{4}$  de xícara de óleo ou azeite e 1 pitada de sal.

a) Calcule a quantidade de cada ingrediente para dobrar a receita.

b) Calcule a quantidade de cada ingrediente para fazer metade da receita.

4) Tradicionalmente, os paulistas costumam comer pizza nos finais de semana. A família de João, composta por ele, sua esposa e seus filhos, comprou uma pizza tamanho gigante cortada em 20 pedaços iguais. Sabe-se que João comeu  $\frac{3}{12}$  e sua esposa comeu  $\frac{2}{5}$  e sobraram N pedaços para seus filhos. O valor de N é?

5) Calcule:

- a) 20% de R\$ 30,00
- b) 30% de R\$ 20,00
- c) 30% de 50%

6) Ao pagar um boleto antes do prazo de vencimento, um banco oferece 10% de desconto. Sabendo que o valor do desconto foi de R\$ 35,00, quanto foi pago pelo boleto?

### **Exercícios Complementares**

1) (ENEM 2011) O pantanal é um dos mais valiosos patrimônios naturais do Brasil. É a maior área úmida continental do planeta - com aproximadamente 210 mil km<sup>2</sup>, sendo 140 mil km<sup>2</sup> em território brasileiro, cobrindo parte dos estados de Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. As chuvas fortes são comuns nessa região. O equilíbrio desse ecossistema depende, basicamente, do fluxo de entrada e saída de enchentes. As cheias chegam a cobrir até  $\frac{2}{3}$  da área pantaneira.

Durante o período chuvoso, a área alagada pelas enchentes pode chegar a um valor aproximado de:

- a) 91,3 mil km<sup>2</sup>
- b) 93,3 mil km<sup>2</sup>
- c) 140 mil km<sup>2</sup>
- d) 152,1 mil km<sup>2</sup>
- e) 233,3 mil km<sup>2</sup>

2) (FMABC 2014) Das 1350 pessoas que vivem em um condomínio residencial, sabe-se que 20% têm, cada uma, um único animal de estimação; a terça parte do número de pessoas restantes tem, cada uma, exatamente três animais de estimação; os demais moradores não têm quaisquer

animais de estimação. Nessas condições, o total de animais de estimação dos moradores desse condomínio é:

- a) 900
- b) 920
- c) 950
- d) 1280
- e) 1350

3) (ENEM 2012) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

- Hipoglicemia: taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
- Normal: taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
- Pré-diabetes: taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
- Diabetes Melito: taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
- Hiperglicemia: taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de

- a) hipoglicemia
- b) normal
- c) pré-diabetes
- d) diabetes melito
- e) hiperglicemia.

4) (PSS UNIOESTE) O número decimal 0,42 pode ser representado na forma fracionária por

- a)  $\frac{21}{10}$
- b)  $\frac{42}{10}$
- c)  $\frac{21}{50}$

d)  $\frac{21}{100}$

e)  $\frac{42}{1000}$

## **Apêndice II**

(FMABC 2014) Das 1 350 pessoas que vivem em um condomínio residencial, sabe-se que 20% têm, cada uma, um único animal de estimação; a terça parte do número de pessoas restantes tem, cada uma, exatamente três animais de estimação; os demais moradores não têm quaisquer animais de estimação. Nessas condições, o total de animais de estimação dos moradores desse condomínio é:

a) 900

b) 920

c) 950

d) 1280

e) 1350

### **2.3.1.1. Relatório**

#### **Relatório do dia 13/04/2019 (4 horas-aula)**

Aos treze dias do mês de abril de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o primeiro encontro do mesmo.

A professora responsável pela disciplina Arleni Elise Sella Lange, esteve presente na sala de aula por um período o qual foi destinado ao repasse de alguns encaminhamentos relevantes quanto à organização do projeto o que é o PROMAT, quanto encontros teremos, forma de certificação, funcionamento das aulas e o lanche ofertado. Quando questionado sobre as informações repassadas, os alunos não apresentaram dúvidas.

Após iniciamos a dinâmica de apresentação nomeada “Se vira nos dez”, os alunos e nós, estagiários, tivemos um tempo determinado por uma ampulheta de dez segundos para nos apresentarmos, foi sugerido que durante a apresentação fosse dito o nome, idade, cidade e a motivação para participar do PROMAT, também oportunizamos que os alunos virassem mais de uma vez a ampulheta caso tempo não fosse o suficiente. Observamos que a principal motivação dos alunos para participar foi a necessidade de compreender a disciplina de matemática, considerada por eles, muito complexa.

Ao término da dinâmica de apresentação, orientamos os alunos a sentarem-se em duplas para a realização da próxima atividade, o Show do Milhão do Conhecimento, um quiz com questões dos conteúdos que serão abordados durante o PROMAT, o quiz foi inspirado no programa de Televisão Show do Milhão do apresentador Silvio Santos. Explicamos que cada questão teria um tempo estipulado de três minutos para a resolução e poderiam utilizar três auxílios durante todo quiz, estes auxílios eram chamados por meio de plaquinhas que deveriam levantar e aguardar para os professores irem ajudar, também foi pedido para escreverem se consideravam as questões: Fácil, média ou difícil.

Tivemos a necessidade de realizar algumas adaptações durante a atividade, devido ao tempo para o término e a dificuldade dos alunos durante as questões. A primeira adaptação foi a de aumentar um minuto o tempo de resolução para que os alunos realizassem a leitura do problema, na segunda adaptação devolvemos para algumas duplas as plaquinhas, pois ficaram apreensivos de ficarem sem nenhuma plaquinha e não pediam mais os auxílios e nem respondiam as questões, buscamos também ajudar duas duplas ao mesmo tempo para auxiliar

em mais questões, sanando assim o maior número de dúvidas. No entanto, devido tempo e necessidade de iniciar as outras atividades do projeto, paramos o quiz na décima primeira questão. Um desafio encontrado no quiz além da defasagem matemática foi a socialização com alguém desconhecido, pois uma parte das duplas não se conheciam.

Em seguida iniciamos a atividade dos 35 camelos, inicialmente foi apresentado um vídeo do Matemática Multimídia que relatava o problema, anotamos no quadro negro as informações pertinentes ao problema e questionamos os alunos em relação a sua solução, os alunos pensaram por um tempo e não chegaram a algo conclusivo, foi explicado para eles a solução proposta no restante do vídeo e realizada a representação geométrica do problema utilizando um retângulo para representar o número de camelos. Para fixação do conteúdo foi proposta um outro problema envolvendo a divisão de chocolates para três pessoas, este problema foi enunciado antes do intervalo e concluído após o intervalo. Ressaltamos para os alunos cumprirem o horário do intervalo.

Quando retornamos do intervalo, foi realizado a representação geométrica da situação problema envolvendo chocolates e ressaltado a importância de se pensar no inteiro ao propor a sua divisão.

Em seguida, explicamos as propriedades das frações, propondo um exemplo numérico de cada propriedade, foi realizado a representação geométrica destes exemplos e consequentemente a definição algébrica. Um aluno pediu para explicar as propriedades de maneira mais pausada, no entanto estávamos com problemas em relação ao tempo para as próximas atividades.

Os últimos conteúdos propostos foram de porcentagem e decimais, para tanto apresentamos uma tabela com a Concorrência do Vestibular da Unioeste de 2018, foi explicado utilizando o exemplo de um curso como calcular a chances de entrar neste curso e a porcentagem, durante esse exemplo foi mostrado como realizar a divisão de decimais, em seguida foi proposto aos alunos escolherem um curso e realizarem o mesmo procedimento. Notamos que muitos alunos escolhiam outros cursos que não o desejado cursar, por acharem mais fáceis para realizar os cálculos. Apresentamos a tabela completa para que pudessem comparar os seus resultados. Propomos problemas envolvendo desconto na compra de imóveis e resolvemos em conjunto com os alunos.

Para finalizar a aula entregamos para os alunos a lista de exercício e devido ao tempo do término da aula, pedimos que os alunos resolvessem a segunda questão dos exercícios complementares da lista para ser entregue e posteriormente as outras questões. Orientamos que concluíssem a questões da lista em casa.

Quatro alunos entregaram a questão proposta, dois alunos iniciaram a resolução extraindo os dados presentes no problema. Três alunos encontraram a porcentagem de um número, no entanto apresentaram dificuldade em concluir o exercício, marcando uma alternativa aleatória.

Como reflexão sobre o conjunto de atividades realizadas com os estudantes, percebemos que a proposta de trabalho em duplas teve êxito, pois conseguiram interagir e solucionar juntos os problemas propostos. Percebemos uma grande defasagem em relação a disciplina de matemática e a esperança de que o PROMAT contribua para solucionar este problema. Um desafio neste primeiro encontro foi o tempo para execução das atividades saindo do que tínhamos previsto para a aula.

Ademais, foi possível concluir todo o plano previsto e trabalhar as atividades propostas para a aula usando recursos diferentes para explicar os conteúdos propostos, o que foi bem proveitoso para manter o interesse da turma. Os alunos demonstraram bastante curiosidade em conhecer o porquê algumas coisas podem ser utilizadas na Matemática.

### **2.3.2. Plano de aula do dia 27/04/2019**

#### **PROMAT – 2º ENCONTRO 27/04/2013**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Introduzir o conceito de razão e grandezas diretamente e inversamente proporcionais por meio da resolução de situações problema, levando-se em conta os conhecimentos prévios dos alunos identificados no primeiro encontro.

Romper com a prática de aplicação de códigos e regras sem justificção fundamentada, mas inseri-los na lógica das demonstrações matemáticas por meio da construção das estruturas e conceitos por meio do encadeamento lógico. Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

##### **Objetivos Específicos:**

Ao se trabalhar com razão, objetiva-se que o aluno seja capaz de reconhecer o conceito em situações problema e aplicá-lo na resolução de problemas.

Ao trabalhar com grandezas diretamente e inversamente proporcionais, objetiva-se que o aluno seja capaz de identificar e explorar as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, tanto quanto resolver situações problemas que envolvam esses conceitos.

##### **Conteúdos:**

Razão e Proporção.

##### **Recursos Didáticos:**

Giz, tabela impressa, projetor, barbantes, lista de exercícios.

**Encaminhamento metodológico:**

Inicialmente será distribuída a lista de exercícios (Anexo I), contendo todos os problemas que iremos utilizar para abordar Razão e Proporção, nesse sentido a aula será baseada em problemas e os conceitos serão construídos a partir desses problemas.

**1. Razão**

Para a abordagem de razão começaremos com o problema a), que segue.

- a) Um determinado concurso com 50 vagas, teve um total de 250 inscritos. Qual o quociente entre o número de inscritos e a quantidade de vagas? O que significa este quociente encontrado?

O objetivo deste problema é que os alunos encontrem o quociente 5 e interpretem este resultado, alguns alunos podem dizer que o 5 representa a quantidade de inscritos por vaga, pois no plano de aula anterior trabalhamos com a concorrência do vestibular. Após essa interpretação iremos passar a definição de razão adaptado de Guelli (2001):

Definição: Sendo  $a$  e  $b$  dois números inteiros, com  $b$  diferente de 0, denomina-se razão entre  $a$  e  $b$  ou razão de  $a$  para  $b$  o quociente  $a/b$ .

Ainda iremos falar que a razão pode ser entendida como a divisão entre duas grandezas, onde grandeza é

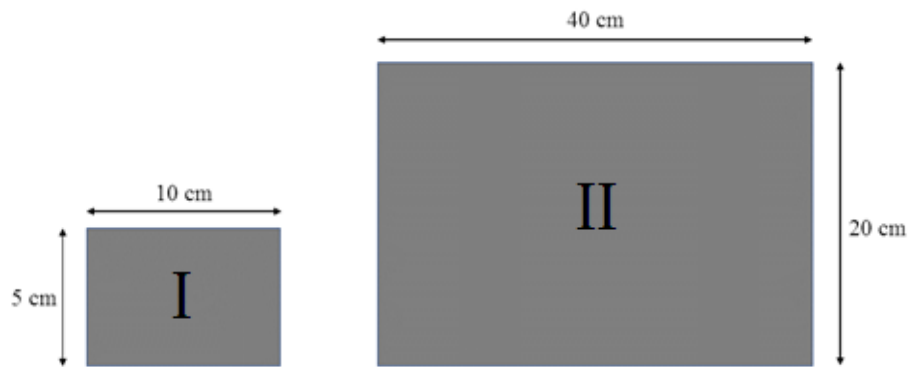
Definição: É uma relação numérica estabelecida com um objeto. Assim, a altura de uma árvore, o volume de um tanque, o peso de um corpo, a quantidade pães, entre outros, são grandezas. Ou ainda é tudo que você pode contar, medir, pesar, enfim, enumerar.

Nesse sentido, os alunos o quociente entre dois números terá um novo significado, ou seja, uma ressignificação de algo aprendido anteriormente, neste caso o quociente passou a ser a razão entre dois números. Além disso, vamos enfatizar que a razão pode ter significados diferentes, dependendo do que está sendo dividido, no P1 temos que o significado da razão é a concorrência.

Após isso, pediremos para que os alunos tentem resolver o problema b), que foi adaptado do livro de Júnior e Castrucci (2009), conforme segue.

- b) Analise os retângulos a seguir:

**Figura 10: Razão entre áreas**



**Fonte:** Acervo dos autores

- Qual a razão entre a área da região retangular I e a área da região retangular II?
- Qual a relação entre razão encontrada e os dois retângulos?

Neste problema os alunos terão que calcular a área de cada retângulo e posteriormente encontrar a razão entre a área do retângulo I e o II. Isto é, irão obter a fração  $\frac{50}{800}$ , caso os alunos não encontrem uma fração equivalente com o menor numerador e denominador possível, iremos auxiliá-los para que obtenham  $\frac{1}{16}$ . Diante disso, perguntaremos aos alunos o que significa esta fração encontrada. Discutiremos este resultado, a fim de levar ao pensamento que 1 cm<sup>2</sup> do retângulo I equivale a 16 cm<sup>2</sup> do retângulo II e com isso iremos introduzir o conceito de escala.

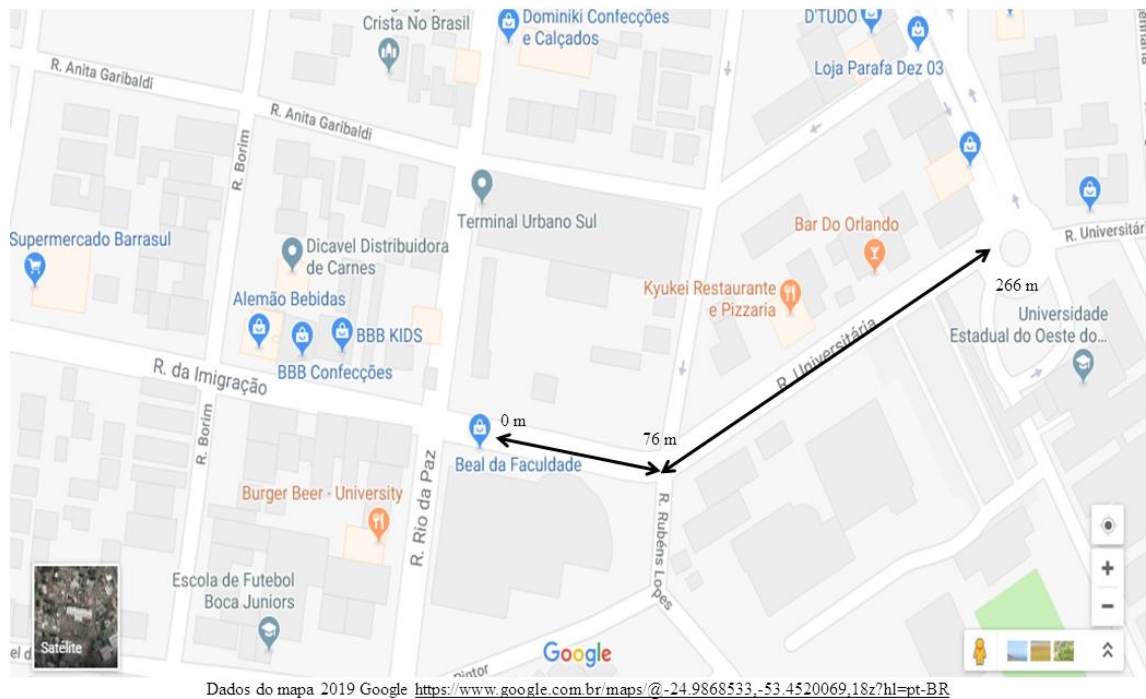
**Definição:** Denomina-se escala de um desenho a razão entre o comprimento considerado no desenho e o correspondente comprimento real, medidos com a mesma unidade. (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009)

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Para trabalhar um pouco mais com escala, utilizaremos um problema que utiliza um mapa retirado do *Google Maps*, este mapa contém locais próximos a Universidade estadual do Oeste do Paraná – Unioeste. Utilizaremos desta maneira para que os alunos possam trabalhar com a escala em um lugar conhecido e próximo de onde estão. Em seu enunciado, o problema pede que encontrem uma escala para o mapa disponibilizado, que será levado impresso, assim que encontrarem a escala, será pedido que obtenham a distância da rotatória da Unioeste até o Terminal Urbano Sul.

3) O mapa a seguir apresenta a região próxima da Unioeste. Considerando que a distância entre o mercado Beal e a rotatória da Unioeste é de 266 metros, encontre uma escala para este mapa. Após encontrar a escala, utilize-a para obter a distância entre a rotatória da Unioeste e o Terminal Urbano Sul.

**Figura 11: Mapa**



**Fonte:** Dados do mapa 2019 Google <https://www.google.com.br/maps/@-24.9868533,-53.4520069,18z?hl=pt-BR>

Este problema leva o aluno a utilizar o conceito de escala, equivalência de frações e transformação de unidades, pois ao medir o mapa temos que a distância é de 14 centímetros. Isto é, uma maneira de representar a escala é  $\frac{14}{26600}$ , ou ainda  $\frac{1}{1900}$ . Ainda é possível que alguns representem da seguinte maneira  $\frac{1}{19}$ , ou seja 1 centímetro do mapa equivale a 19 metros da distância real, mas a representação na forma da escala deve ser na mesma unidade. Durante a resolução, vamos auxiliar os alunos, mas sempre oportunizando que o aluno construa a própria resolução.

## 2. Problema dos barbantes

Dividiremos a turma em duplas e para cada dupla iremos entregar cinco barbantes coloridos de medidas 10 cm (verde), 20 cm (branco), 30 cm (roxo), 40 cm (vermelho) e 50 cm

(preto), sendo que apenas o barbante de 10 cm terá sua medida informada e a partir deste devem descobrir a medida dos demais. Pedir para que observem os barbantes durante algum tempo e indagar:

- Quantas vezes o barbante verde cabe no barbante branco?
- Quantas vezes o barbante de branco cabe no barbante roxo?
- Que parte o barbante verde é dos demais?
- E se vocês tivessem um 6º barbante você consegue encontrar quanto ele mediria, seguindo a sequência? Por quê?

Sistematizaremos os dados conforme o Quadro 1:

**Quadro 3: Proporção dos barbantes**

| Barbantes | Verde | Branco | Roxo | Vermelho | Roxo |
|-----------|-------|--------|------|----------|------|
| Verde     | 1     |        |      |          |      |
| Branco    |       | 1      |      |          |      |
| Roxo      |       |        | 1    |          |      |
| Vermelho  |       |        |      | 1        |      |
| Preto     |       |        |      |          | 1    |

**Fonte:** Acervo dos autores

Após o preenchimento e da análise dos dados contidos no quadro, definiremos proporção.

Definição: Se duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Assim, se a razão entre os números a e b é igual à razão entre os números c e d, dizemos que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  é uma proporção.

### 3. Grandeza diretamente proporcional

Para iniciar, pediremos aos alunos que resolvam a questão a seguir:

Márcia faz doces para vender e sua última encomenda para uma festa de aniversário de criança foi de 80 brigadeiros. Para obter esta quantidade ela usou 1 lata de leite condensado. Agora, ela recebeu uma encomenda de 400 brigadeiros. Quantas latas de leite condensado ela gastará? Analise o quadro abaixo e complete com os resultados obtidos.

**Quadro 4: Brigadeiros**

| Latas | Brigadeiros |
|-------|-------------|
| 1     | 80          |
| 2     |             |
| 3     |             |
| 4     |             |
| 5     |             |
| 6     |             |

**Fonte:** Acervo dos autores

- a) Qual a razão entre o número de latas utilizadas?
- b) Qual a razão entre o número de brigadeiros?
- c) O que foi possível observar entre as razões encontradas?

A partir dos resultados obtidos, iremos relacionar as razões encontradas no item a, com as razões encontradas no item b, notando que as razões são iguais, mostrando assim que as grandezas são diretamente proporcionais, pois as grandezas variam sempre na mesma razão, definindo então grandezas diretamente proporcionais. Definiremos grandeza diretamente proporcional de acordo com Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p.277).

Definição: Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica e assim por diante.

#### **4. Grandeza inversamente proporcional**

Para inserir o conceito de grandeza inversamente proporcional, os alunos deverão resolver a seguinte questão:

Imaginem um percurso feito por uma bicicleta, uma moto e um carro. Com velocidade média de 15 km/h, Eduarda gastou 120 minutos com sua bicicleta, com a velocidade média de 30km/h Guilherme gastou 60 minutos com sua moto e Natália gastou 20 minutos com velocidade média de 90 km/h, conforme tabela abaixo.

**Quadro 5: Grandeza inversamente proporcional**

|           | Velocidade (km/h) | Tempo (min) |
|-----------|-------------------|-------------|
| Eduarda   | 15                | 120         |
| Guilherme | 30                | 60          |
| Natália   | 90                | 20          |

**Fonte:** Acervo dos autores.

- Qual a razão entre as velocidades?
- Qual a razão entre o tempo gasto para fazer esse percurso?
- O que foi possível observar entre as razões encontradas?

Ao resolver as perguntas, os alunos deverão notar que a razão entre as velocidades é  $\frac{90}{30} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$  e que a razão entre o tempo é  $\frac{20}{60} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ , ou seja, as razões são inversas, logo a razão entre as grandezas é inversamente proporcionais. Definiremos grandeza inversamente proporcional de acordo com Giovanni Júnior e Castrucci (2009, p.279).

**Definição:** Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra se reduz pela metade; triplicando uma delas, a outra se reduz pela terça parte e assim por diante.

## 5. Lista de exercícios

A lista de exercício (Apêndice I) será trabalhada através da resolução de situações problemas, além das atividades listadas acima, também apresentaremos alguns exercícios complementares de Enem e vestibulares, para serem resolvidos em sala de aula. Durante a realização da atividade estaremos mediando os alunos sempre que necessário, fazendo intervenções quando necessário. Após a resolução, corrigiremos as atividades no quadro, abordando definições anteriores para maior fixação.

## Avaliação:

A avaliação ocorrerá de maneira contínua durante a aula e usaremos a produção escrita dos alunos para na próxima aula retomar conceitos que tiveram dificuldade. Diagnosticar os conhecimentos matemáticos dos participantes e introduzi-los na perspectiva da avaliação da aprendizagem formativa., para isto utilizaremos os problemas do apêndice II.

## Referências

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática, 7º ano**. São Paulo: Renovada, 2009.

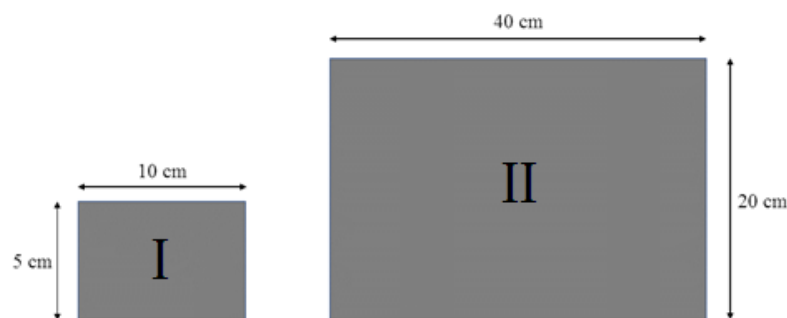
GUELLI, Oscar. **Matemática: Uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 2001.

## Apêndice I

|                                                                                                                                                                                                                             |                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
|  <div style="text-align: center;"> <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br/> <b>PROMAT 2019 - 2º Encontro</b> </div> |                         |
| <b>NOME:</b>                                                                                                                                                                                                                | <b>DATA: 27/04/2019</b> |

1) Um determinado concurso com 250 vagas, teve um total de 50 inscritos. Qual o quociente entre o número de inscritos e a quantidade de vagas? O que significa este quociente encontrado?

2) Analise os retângulos a seguir:



a) Qual a razão entre a área da região retangular I e a área da região retangular II?

b) Qual a relação entre razão encontrada e os dois retângulos?

4) Sabendo que o barbante verde, tem 10 centímetros, quanto medem os outros barbantes?

a) Quantas vezes o barbante verde cabe no barbante branco?

b) Quantas vezes o barbante de branco cabe no barbante roxo?

c) Que parte o barbante verde é dos demais?

d) E se vocês tivessem um 6º barbante você consegue encontrar quanto ele mediria, seguindo a sequência? Por quê?

e) Preencha o quadro abaixo com os resultados obtidos

| Barbantes | Verde | Branco | Roxo | Vermelho | Preto |
|-----------|-------|--------|------|----------|-------|
| Verde     | 1     |        |      |          |       |
| Branco    |       | 1      |      |          |       |
| Roxo      |       |        | 1    |          |       |
| Vermelho  |       |        |      | 1        |       |
| Preto     |       |        |      |          | 1     |

5) Márcia faz doces para vender e sua última encomenda para uma festa de aniversário de criança foi de 80 brigadeiros. Para obter esta quantidade ela usou 1 lata de leite condensado. Agora, ela recebeu uma encomenda de 400 brigadeiros. Quantas latas de leite condensado ela gastará? Analise o quadro abaixo e complete com os resultados obtidos.

| Latas | Brigadeiros |
|-------|-------------|
| 1     | 80          |
| 2     |             |
| 3     |             |
| 4     |             |
| 5     |             |
| 6     |             |

- Qual a razão entre o número de latas utilizadas?
- Qual a razão entre o número de brigadeiros?
- O que foi possível observar entre as razões encontradas?

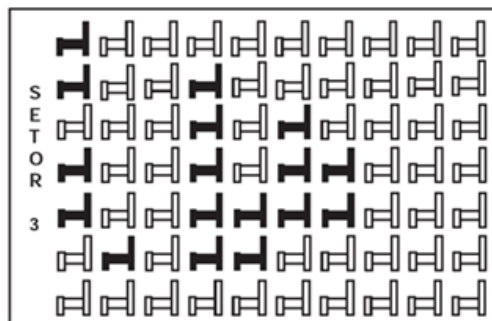
6) Imaginem um percurso feito por uma bicicleta, uma moto e um carro. Com velocidade média de 15 km/h, Eduarda gastou 120 minutos com sua bicicleta, com a velocidade média de 30km/h Guilherme gastou 60 minutos com sua moto e Natália gastou 20 minutos com velocidade média de 90 km/h, conforme quadro abaixo.

| Velocidade (km/h) |    | Tempo (min) |
|-------------------|----|-------------|
| Eduarda           | 15 | 120         |
| Guilherme         | 30 | 60          |
| Natália           | 90 | 20          |

- a) Qual a razão entre as velocidades?
- b) Qual a razão entre o tempo gasto para fazer esse percurso?
- c) O que foi possível observar entre as razões encontradas?

### Exercícios complementares

1) (ENEM 2013) Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

- a)  $\frac{17}{70}$
- b)  $\frac{17}{57}$
- c)  $\frac{53}{70}$
- d)  $\frac{53}{17}$
- e)  $\frac{70}{17}$

2) (ENEM 2016) Num mapa com escala 1 : 250 000, a distância entre as cidades A e B é de 13 cm. Num outro mapa, com escala 1 : 300 000, a distância entre as cidades A e C é de 10 cm.

Em um terceiro mapa, com escala 1 : 500 000, a distância entre as cidades A e D é de 9 cm. As distâncias reais entre a cidade A e as cidades B, C e D são, respectivamente, iguais a X, Y e Z (na mesma unidade de comprimento). As distâncias X, Y e Z, em ordem crescente, estão dadas em:

- a) X, Y, Z
- b) Y, X, Z
- c) Y, Z, X
- d) Z, X, Y
- e) Z, Y, X

3) (FCC 2010) Um pai deixou para seus filhos uma herança no valor de 5.500,00 para ser dividida entre eles na razão direta do número de dependentes de cada um. Sabendo-se que o primeiro herdeiro tem 2 dependentes, o segundo 3 e o terceiro 5, coube na partilha ao primeiro herdeiro a quantia de:

- a) 1.000,00
- b) 1.100,00
- c) 1.200,00
- d) 1.300,00
- e) 1.650,00

4) (ENEM 2012) O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e percorrida pelo atleta?

- a) 1:700
- b) 1:7 000
- c) 1:70 000
- d) 1:700 000
- e) 1:7 000 000

5) Em um mapa cuja escala é de  $1/25000$ , a que distância em centímetros estarão dois lugares, que na realidade estão separados por 10 km?

- a) 2 cm
- b) 4 cm
- c) 20 cm
- d) 40 cm
- e) 200 cm

## **Apêndice II**

1) (Adaptado ENEM 2016) Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água. Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização. Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3mg em 2dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho. Qual será o filtro descartado?

2) (Adaptado SARESP) A planta de uma casa foi feita na escala 1 : 50 ( o que significa que cada 1 centímetro na planta corresponde a 50 centímetros no real). Sendo a cozinha de forma retangular, medindo na planta 9 centímetros e 10 centímetros, então quais serão as dimensões reais dessa cozinha?

### 2.3.2.1. Relatório

#### Relatório do dia 27/04/2019 (4 horas-aula)

Neste dia, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, na sala de número A-108, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I, do curso de Licenciatura em Matemática, e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o segundo encontro do projeto. Destes inscritos, trinta e dois alunos compareceram e a professora, nossa orientadora, Andréia Büttner Ciani, esteve presente na sala de aula por um período.

Iniciamos o encontro desejando boas-vindas aos alunos e corrigindo a questão avaliativa que foi recolhida no final da aula anterior, enfatizando os principais conceitos desenvolvidos no encontro anterior.

Em seguida, introduzimos a ideia de razão como o quociente entre duas grandezas. De maneira dialogada, esclarecemos o significado de grandezas e a exemplificamos e os alunos nos forneceram vários exemplos como o peso. Destacando a definição de números racionais, simultaneamente.

Para introduzir escala, utilizamos o problema 2, onde precisava encontrar a razão entre a área de dois retângulos e, posteriormente, dizer qual a relação entre a razão obtida e as áreas dos retângulos, ao chegarmos na fração  $\frac{1}{16}$  alguns alunos disseram que para fazer um retângulo maior, é preciso 16 retângulos do menor, em seguida mostramos para os alunos que  $1 \text{ cm}^2$  do menor retângulo equivale a  $16 \text{ cm}^2$  do maior, ou seja eles estão em uma escala, e podemos pensar que o retângulo menor é uma redução do maior.

**Figura 12: Atividade escala**



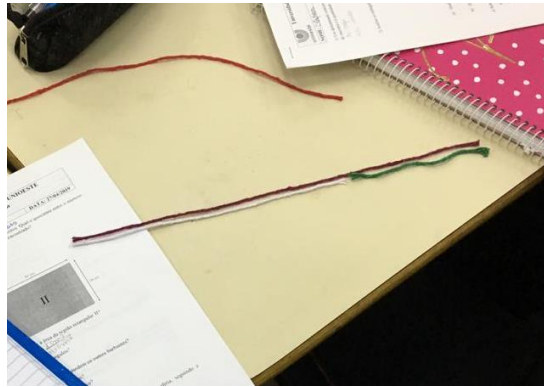
**Fonte:** Acervo dos autores.

Após isso passamos a definição de escalas e as diferentes representações. E, então, entregamos um mapa da região da Unioeste, impresso em papel A4, e réguas, esta foi a atividade 1. Para esta atividade os alunos precisavam encontrar uma escala para este mapa e utilizá-la para encontrar uma nova distância. Em primeiro momento, percebemos que muitos alunos não convertiam as medidas, isto é, de metros para centímetros, vendo isso, dávamos dicas para eles: qual a definição de escala? Será que tem que ser na mesma unidade?

Os alunos foram muito participativos nesta atividade. Após um tempo em que os alunos estavam resolvendo, pedimos para que nos ajudassem a obter uma escala, enquanto íamos pondo os dados no quadro, os alunos nos ajudavam. E com isso obtemos os resultados e a atividade se encerrou.

Na atividade 2, o problema dos barbantes foi realizado em duplas, os alunos receberam cinco barbantes coloridos, sendo que só sabiam que o barbante menor (verde) média 10 centímetros e deviam encontrar a medida dos outros quatro. A partir das instruções os alunos começaram a medir os barbantes, conforme figura abaixo.

**Figura 13: Medição dos barbantes**



**Fonte:** Acervo dos autores

Para seguir a atividade dos barbantes, os alunos foram instruídos a responder algumas questões, as quais pediam quantas vezes cada barbante cabia em outro. Alguns alunos nos questionaram sobre como escrever que o barbante branco cabia uma vez, mais metade no barbante roxo, nós incentivamos sempre eles a anotarem da maneira que achavam mais correto, diante disso, alguns anotaram em forma de fração, outros optaram por escrever “uma vez e meia”.

Na alternativa que pedia qual seria a medida do sexto barbante, se ele continuasse com essa sequência, muitos alunos responderam que seria 60 centímetros, pelo fato de cada um estar aumentado 10 centímetros do outro. Entretanto, achamos curiosa uma resposta, em que uma aluna relacionou o tamanho dos barbantes com uma progressão aritmética pois cada barbante aumenta 10 centímetros do anterior, formando assim uma progressão aritmética de razão 10.

Depois da correção das alternativas, os alunos foram estimulados a colocar suas conclusões em um quadro, no qual mostrava a proporção dos barbantes. Após o preenchimento da tabela, convidamos alguns alunos a colocar suas conclusões em uma tabela feita no quadro negro, nesse momento houve um pouco de descontração para decidirem quem iria fazer, até que alguns alunos se propuseram a ir ao quadro. O quadro das proporções após a conclusão da atividade, está na figura abaixo.

Figura 14: Quadro das proporções

|          | Verde               | Branco                        | Roxo                          | Vermelho                      | Preto                         |
|----------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Branco   | $\frac{10}{10} = 1$ | $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ | $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ | $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ | $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ |
| Verde    |                     | $\frac{20}{10} = 2$           | $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ | $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ | $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ |
| Amarelo  |                     |                               | $\frac{30}{10} = 3$           | $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ | $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ |
| Roxo     |                     |                               |                               | $\frac{40}{10} = 4$           | $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$ |
| Vermelho |                     |                               |                               |                               | $\frac{50}{10} = 5$           |
| Preto    |                     |                               |                               |                               |                               |

Fonte: Acervo dos autores

Na atividade 3, de grandezas diretamente proporcionais, utilizamos uma questão adaptada, já utilizada no quiz realizado no primeiro encontro, na qual os alunos deveriam relacionar o número de brigadeiros que poderiam ser feitos com um certo número de latas e anotar em uma tabela os resultados obtidos. Depois disso, era solicitado que encontrassem a razão entre o número de brigadeiros, a razão entre o número de latas e o que podiam observar entre essas razões. Notamos que inicialmente alguns alunos tiveram facilidade para o preenchimento da tabela, porém nas alternativas eles sentiram uma leve dificuldade para resolver, pois acharam que seria algo muito mais elaborado e difícil, entretanto, ao encontrar a forma simplificada das razões e perceber que elas eram iguais, foi perceptível a satisfação que os alunos sentiram ao resolver a questão e notar que as razões eram proporcionais, e ainda mais, diretamente proporcionais.

Na atividade 4, em relação a grandeza inversamente proporcional, os alunos deveriam imaginar um percurso realizado em uma certa velocidade e tempo já dados. Os alunos deviam responder as mesmas alternativas da atividade anterior. Observamos que os alunos tiveram facilidade para resolução, uma vez que já haviam respondido à atividade anterior. Ao responder sobre a relação entre as razões, alguns alunos anotaram em suas resoluções que as grandezas eram “contrárias”, outros já haviam reconhecido que as grandezas eram inversamente proporcionais.

No último momento da aula, entregamos aos alunos duas questões relacionadas as atividades realizadas nesse encontro, a primeira envolvendo razão e a segunda proporção e escala, para resolverem e entregarem. Trinta e cinco alunos entregaram a avaliação diagnóstica. Todos os alunos responderam a primeira questão e onze alunos deixaram a segunda questão em branco.

No primeiro problema, a maioria dos alunos associou rapidamente o problema a uma razão e calculou as razões de todos filtros para identificar o correto. No entanto, notamos que tiveram uma grande dificuldade em verificar qual razão a maior, ou seja, qual a fração que era a maior, em várias resoluções notamos que os alunos entendiam que  $\frac{9}{2} > \frac{5}{1}$ . Alguns alunos apresentaram dificuldade também ao dividirem as razões, escrevendo que  $\frac{18}{6} = 2$  e  $\frac{18}{2} = 6$ .

No segundo problema, treze alunos apresentaram dificuldade na interpretação da questão, associando a área sendo que a questão solicitava as dimensões. No entanto, apesar deste engano, a maioria utilizou corretamente a definição de escala para resolver o exercício. A maioria dos alunos não colocaram as unidades de medida ao concluírem o exercício.

### **2.3.3. Plano de aula do dia 04/05/2019**

#### **PROMAT – 3º ENCONTRO 04/05/2019**

**Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

**Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

**Objetivo Geral:**

Resolver situações problemas que envolvam grandezas inversamente e diretamente proporcionais por de meio de estratégias variadas e da utilização de regras de três simples e composta.

**Objetivos Específicos:**

Ao se trabalhar com as propriedades da proporcionalidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de identificar em situações problemas como aplicar a propriedade.

Ao se trabalhar com o jogo de dominó com proporções, objetiva-se que os alunos sejam capazes de compreender os problemas, de modo a resolvê-los com facilidade para avançar com o jogo.

Ao se trabalhar com a proporção entre duas ou mais grandezas, objetiva-se que os alunos relacionem as grandezas diretamente e/ou inversamente proporcionais de maneira a resolver problemas que envolvam estes conceitos.

**Conteúdos:**

Propriedades da proporcionalidade, regra de três simples e regra de três composta

**Recursos Didáticos:**

Giz, Jogo Dominó com Proporções, Lista de regras do jogo, material de apoio para o jogo

### Encaminhamento metodológico:

#### 1. Propriedade Fundamental da Proporcionalidade

Para introduzirmos essa propriedade trabalharemos com o seguinte problema:

1) (Unioeste 2013) Carlos e Pedro são dois vendedores de uma loja de eletrodomésticos. Sabe-se que a cada 3 televisores que Carlos vende, Pedro vende 5. Se no mês passado Carlos vendeu 36 televisores, então é correto afirmar que Pedro vendeu quantos televisores?

Após lermos juntamente com os alunos esse problema relembremos os alunos do conteúdo estudado no encontro anterior e pediremos para eles se conseguem encontrar uma proporção a partir desses dados. Teremos duas grandezas as quais correspondem ao número de vendas de cada vendedor e ao número total de vendas de cada vendedor no mês anterior.

**Quadro 6: Número de vendas**

|        | Número vendas de cada Vendedor | Número total de vendas no mês anterior |
|--------|--------------------------------|----------------------------------------|
| Carlos | 3                              | 36                                     |
| Pedro  | 5                              | x                                      |

**Fonte:** Acervo dos autores

Assim teremos duas razões:  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{36}{x}$ , e com duas razões temos uma proporção com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Questionaremos os alunos se o problema proposto é diretamente ou inversamente proporcional, explicaremos em seguida que o é diretamente proporcional. Logo,  $\frac{3}{5} = \frac{36}{x}$ . Como encontramos uma proporção então podemos utilizar a igualdade, temos então que  $x = 60$ . Portanto, o teorema fundamental das proporções diz o seguinte:

Definição: Tomando uma proporção  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ .

#### 2. Jogo Dominó com Proporções

A atividade 2 será um jogo de Dominó Com Proporções, no qual selecionamos 12 questões para serem usadas no jogo, as atividades utilizadas foram retiradas de Stoodi (2019).

O jogo manterá as raízes do dominó comum, porém o objetivo dos alunos será juntar o problema, a proporção equivalente ao problema, a expressão algébrica encontrada através do princípio fundamental da proporção e o resultado numérico. Os alunos trabalharão em grupos, com 4 alunos, separados em duas duplas, podendo ser jogado em grupos de 6 alunos, com 3 duplas. Durante a aplicação do jogo iremos acompanhar e orientar os alunos. O objetivo dessa atividade é que os alunos possam aplicar o princípio fundamental da proporção a partir dos conceitos apresentados na atividade 1, reconhecendo as maneiras de expressar uma proporcionalidade, seja ela diretamente proporcional como inversamente proporcional. Realizaremos um exemplo presente no jogo para facilitar o andamento do jogo para os alunos.

### 3. Problema Regra de Três Composta

Para abordar regra de três composta, vamos utilizar um problema do ENEM:

2) (ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m<sup>3</sup>. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m<sup>3</sup>, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. Qual será a quantidade de ralos do novo reservatório?

Para isso, vamos pedir para que os alunos tentem resolver, primeiramente. Após isso, vamos resolver juntamente com os alunos, para tanto utilizaremos duas resoluções. A primeira resolução será a montar um quadro com as grandezas que o problema traz, isto é

**Quadro 7: Reservatório**

| Reservatório (m <sup>3</sup> ) | Ralos | Horas |
|--------------------------------|-------|-------|
| 900                            | 6     | 6     |
| 500                            | 4     | x     |

**Fonte:** Acervo dos autores

Na resolução iremos utilizar a maneira exposta no livro Matemática e Realidade de Iezzi, Dolce e Machado (2009), ou seja, vamos comparar a grandeza Hora com as demais, se observarmos a Hora é inversamente proporcional a quantidade de Ralos, mas é diretamente proporcional a quantidade de água no reservatório. Com isso, temos que  $\frac{x}{6} = \frac{900}{500} \cdot \frac{6}{4}$  (i).

Com esta igualdade chegaremos que  $x = 5$ , isto é, a quantidade de ralos para o novo reservatório será 5. Até este momento não foi explicado o motivo da igualdade (i), para isso utilizaremos uma nova resolução. Cada ralo elimina  $\frac{900}{6} = 150\text{m}^3$  em 6 horas, então cada ralo elimina  $\frac{150}{6} = 25\text{m}^3/\text{h}$ , em 4 horas cada ralo irá eliminar  $25 \cdot 4 = 100\text{m}^3$ . Diante disso, o novo reservatório precisará de  $\frac{500}{100} = 5$  ralos. Vamos reescrever as operações que realizamos:

$\frac{500}{\frac{900}{\frac{6}{6} \cdot 4}}$  vamos manipular essa expressão numérica, temos então

$$\frac{500}{\frac{900}{\frac{6}{6} \cdot 4}} = \frac{500}{\frac{900}{6} \cdot \frac{4}{6}} = 500 \cdot \frac{6}{900} \cdot \frac{6}{4} = \frac{500}{900} \cdot \frac{6}{4} \cdot 6, \text{ neste momento vemos a inversão da fração } \frac{4}{6},$$

conforme foi feito na primeira resolução e a multiplicação entre as frações  $\frac{500}{900}$  e  $\frac{6}{4}$ . Sabemos que o resultado dessa expressão será 5, como vimos anteriormente então  $\frac{500}{900} \cdot \frac{6}{4} \cdot 6 = 5 \Rightarrow \frac{500}{900} \cdot \frac{6}{4} = \frac{5}{6}$  (ii), sabendo que  $x = 5$ , e observando a igualdade (i), vemos que ao substituir 5 por x em (ii) teremos a mesma expressão.

Vamos explicar para os alunos que na maioria dos casos é mais fácil utilizar a primeira resolução, lembrando de verificar a proporção das grandezas. Entretanto, o método de reduzir à unidade, que foi utilizado na segunda resolução, também pode ser utilizado, neste caso usamos este método para esclarecer algumas coisas da primeira resolução.

#### 4. Lista de Exercícios

A lista de exercícios (Apêndice II), será baseada em exercícios do ENEM, abordando conteúdos expostos em aula. A lista será resolvida durante a aula pelos alunos, e conforme o andamento faremos a correção no quadro das questões abordadas.

#### Avaliação:

A avaliação ocorrerá de maneira contínua durante a aula e usaremos a produção escrita dos alunos para na próxima aula retomar conceitos que tiveram dificuldade. Diagnosticar os conhecimentos matemáticos dos participantes e introduzi-los na perspectiva da avaliação da

aprendizagem formativa, para isto utilizaremos os problemas do Apêndice II. Ainda nesta aula levaremos em conta as resoluções que foram apresentadas pelos participantes no primeiro encontro.

### Referências

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

STOODI. **Exercícios de regra de três**. Disponível em:

<<https://www.stoodi.com.br/exercicios/matematica/regra-de-tres/?page=9>>. Acesso em: 04 abr. 2019.

### Apêndice I

|                                                                                                        |                                                                                                |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <br><b>unioeste</b> | <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br><b>PROMAT 2019 - 3º Encontro</b> |  |
| <b>NOME:</b>                                                                                           | <b>DATA: 04/05/2019</b>                                                                        |  |

1) (Unioeste 2013) Carlos e Pedro são dois vendedores de uma loja de eletrodomésticos. Sabe-se que a cada 3 televisores que Carlos vende, Pedro vende 5. Se no mês passado Carlos vendeu 36 televisores, então é correto afirmar que Pedro vendeu:

- a) 36
- b) 40
- c) 44
- d) 52
- e) 60

2) (ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m<sup>3</sup>. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m<sup>3</sup>, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no

novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

- a) 2
- b) 4
- c) 5
- d) 8
- e) 9

### **Exercícios complementares**

1) (ENEM 2016) Um produtor de maracujá usa uma caixa-d'água, com volume  $V$ , para alimentar o sistema de irrigação de seu pomar. O sistema capta água através de um furo no fundo da caixa a uma vazão constante. Com a caixa-d'água cheia, o sistema foi acionado às 7 h da manhã de segunda-feira. Às 13 h do mesmo dia, verificou-se que já haviam sido usados 15% do volume da água existente na caixa. Um dispositivo eletrônico interrompe o funcionamento do sistema quando o volume restante na caixa é de 5% do volume total, para reabastecimento.

Supondo que o sistema funcione sem falhas, a que horas o dispositivo eletrônico interromperá o funcionamento?

- a) Às 15h de segunda-feira
- b) Às 11h de terça-feira
- c) Às 14h de terça-feira
- d) Às 4h de quarta-feira
- e) Às 21h de terça-feira

2) (ENEM 2017) Em uma embalagem de farinha encontra-se a receita de um bolo, sendo parte dela reproduzida a seguir:

#### **INGREDIENTES**

- 640 g de farinha (equivalente a 4 xícaras).
- 16 g de fermento biológico (equivalente a 2 colheres medidas)

Possuindo apenas a colher medida indicada na receita, uma dona de casa teve que fazer algumas conversões para poder medir com precisão a farinha. Considere que a farinha e o fermento possuem densidades iguais.

Cada xícara indicada na receita é equivalente a quantas colheres medidas?

- a) 10

- b) 20
- c) 40
- d) 80
- e) 320

3) (UFPB 2013) Um hospital de certa cidade atende, em média, 720 pacientes diariamente, com 30 médicos trabalhando 6 horas por dia. Para aumentar a média de pacientes atendidos nesse hospital, a Secretaria de Saúde decidiu tomar as seguintes medidas:

- Contratar mais 5 médicos.
- Alterar a jornada diária de trabalho dos médicos de 6 para 8 horas.

Considerando as informações apresentadas e as medidas tomadas pela Secretaria de Saúde, a média de pacientes atendidos por dia passará a ser de

- a) 1040
- b) 1060
- c) 1080
- d) 1100
- e) 1120

4) (ENEM 2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

- a) 920 kg
- b) 800 kg
- c) 720 kg
- d) 600 kg
- e) 570 kg

## Apêndice II

1) (ENEM 2012) Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros de água por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

2) (ENEM 2015) Uma confecção possuía 36 funcionários, alcançando uma produtividade de 5 400 camisetas por dia, com uma jornada de trabalho diária dos funcionários de 6 horas. Entretanto, com o lançamento da nova coleção e de uma nova campanha de marketing, o número de encomendas cresceu de forma acentuada, aumentando a demanda diária para 21 600 camisetas. Buscando atender essa nova demanda, a empresa aumentou o quadro de funcionários para 96. Ainda assim, a carga horária de trabalho necessita ser ajustada.

Qual deve ser a nova jornada de trabalho diária dos funcionários para que a empresa consiga atender a demanda?

### **2.3.3.1. Relatório**

#### **Relatório do dia 04/05/2019 (4 horas-aula)**

Aos quatro dias do mês de maio de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-104, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o terceiro encontro do mesmo.

Iniciamos a aula desejando boas vindas e retomando os conteúdos abordados no encontro anterior, para isso realizamos a correção de duas questões que os alunos resolveram e foram recolhidas para análise no encontro anterior, enfatizamos as principais dificuldades que apresentaram ao responder as questões.

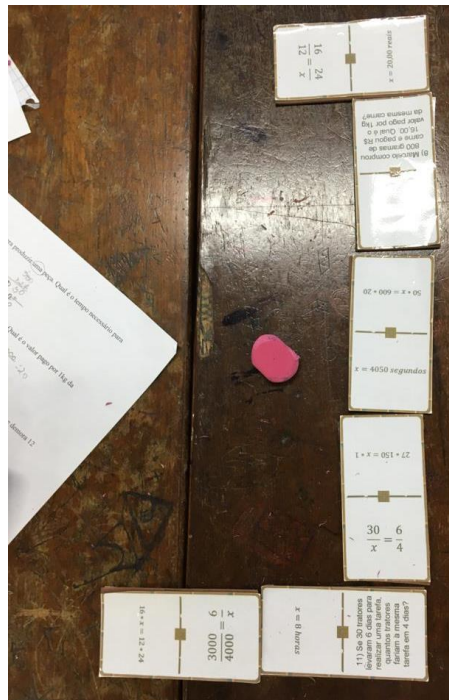
Para iniciar o conteúdo abordado durante a aula, foi proposto para os alunos que resolvessem uma questão do vestibular da Unioeste envolvendo a venda de televisores, os passos da resolução foram explanados no quadro negro com a participação dos alunos e em seguida, foi formalizado algebricamente a Propriedade Fundamental das Proporções que utilizamos para resolver a questão. Explicamos que essa propriedade é o que garante a regra de três bem conhecida por eles, e durante a aula não utilizaríamos o nome regra de três e sim a propriedade fundamental das proporções. Já no início dos questionamentos, quando começamos a conversar sobre a resolução do exercício os alunos reconheceram a utilização da conhecida regra de três.

A próxima atividade proposta durante a aula foi a do Super Dominó, um jogo de dominó adaptado com questões que utilizam a proporções e com a temática do jogo da Nintendo o Super Mario. Antes de jogarem, foi apresentado em lâminas as regras do jogo e explicado cada uma delas com o passo a passo para jogar, pois tivemos que realizar algumas adaptações do jogo tradicional de dominó, também foi realizado a resolução de duas questões do jogo, uma com as grandezas diretamente proporcionais e outras com as grandezas inversamente proporcionais. Ao término da resolução das questões foi questionado os alunos referentes as dúvidas em relação ao jogo e permitido o início do jogo, sendo entregue as peças e uma folha com o enunciado das doze questões apresentadas no jogo.

Quando iniciaram o dominó tiveram bastante dúvidas em relação as regras e ao conteúdo proposto no jogo, no entanto conforme foram sanando suas dúvidas conseguiram dar

andamento no jogo com independência, socializando e realizando seus próprios acordos para jogar. Alguns grupos fizeram o acordo de responder as questões antes de prosseguir o jogo, outros foram realizando a solução com a necessidade do jogo. Uma estratégia bastante usada foi a de analisar o universo das questões, por exemplo, se alguma questão falava sobre caminhões a resposta dela também seria sobre caminhões.

**Figura 15: Dominó Regra de Três**



**Fonte:** Acervo dos autores

Dois grupos conseguiram concluir o jogo antes do intervalo, o restante foi orientado ao concluir após o intervalo. Ao retornarmos, realizamos alguns questionamentos aos grupos que foram concluindo o jogo, em relação as impressões que tiveram sobre o jogo, de maneira geral, relataram que proposta de jogo foi bem interessante e que conseguiram entender melhor como utilizar a propriedade fundamental das proporções com o jogo do que somente realizando a resolução dos exercícios, a maioria não considerou as ações que utilizaram para jogar como estratégias. Um grupo questionou se todas as turmas do PROMAT estavam realizando a atividade do jogo, pois gostaram do jogo e consideravam proveitoso que mais pessoas jogassem. Todos os grupos conseguiram concluir o jogo antes de iniciarmos a próxima atividade.

Para a atividade seguinte, foi proposto que resolvessem uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, do ano de 2013, sobre um reservatório de água envolvendo

regra de três composta, os alunos tiveram um tempo para solucionar a questão. Em seguida, realizamos a correção no quadro negro, mostramos dois métodos de resolução da questão para os alunos, de forma que o segundo método, esclareceu possíveis dúvidas do primeiro método.

Propomos que os alunos resolvessem uma questão do ENEM – 2009, presente na lista de exercícios, sobre a arrecadação de alimentos de uma escola. Os alunos apresentaram dificuldade na interpretação do exercício, para isso auxiliamos na interpretação e na solução do exercício. Realizamos a resolução da questão no quadro negro.

Devido ao tempo para o término da aula, entregamos a folha impressa com as questões que deveriam ser entregues e orientamos que respondessem essas questões em casa, entregando na próxima aula.

Ademais, foi possível concluir o plano previsto e trabalhar as atividades propostas para a aula usando recursos diferentes para explicar os conteúdos propostos, o que foi bem proveitoso para manter o interesse da turma. Conseguimos utilizar o jogo e a resolução de problemas de maneira equilibrada, trabalhando todos os conteúdos propostos para o Encontro 3.

A avaliação continha duas questões, a primeira com regra de três simples e a segunda com regra de três composta. Obtivemos um retorno da avaliação de nove alunos. Um aluno assinalou a primeira questão sem escrever o processo que utilizou para encontrar o resultado, os demais alunos utilizaram de maneira correta a Propriedade fundamental das proporções. Dois alunos não concluíram a questão realizando para a subtração de  $60-24=36$ , assinalando a resposta 24 de imediato.

Em relação a segunda questão de regra de três composta, dois alunos não responderam a questão e dois alunos não escreveram o processo para solucionar somente assinalaram uma alternativa. Os demais escreveram um quadro com os dados necessários para solução e aplicaram o método explicado durante a aula, encontrando o resultado correto.

#### **2.3.4. Plano de aula do dia 11/05/2019**

##### **PROMAT – 4º ENCONTRO 11/05/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Identificar e resolver problema que envolvam polinômios e equações.

##### **Objetivos Específicos:**

Ao se trabalhar com produtos notáveis, objetiva-se que o aluno seja capaz de reconhecer e resolver problemas que envolvam produtos notáveis.

Ao se trabalhar com monômios objetiva-se introduzir o assunto de “letras” na área matemática, mostrar um caso específico de monômio ao qual os alunos já possuem familiaridade relacionando assim mais de uma área da matemática.

Ao se trabalhar com operações que envolvam polinômios, objetiva-se que os alunos sejam capazes de efetuar operações como adição, subtração, multiplicação e divisão.

Ao se trabalhar com equações, objetiva-se que os alunos compreendam o significado da palavra Equação e relacionem este significado com a definição matemática, além disso almeja-se que compreendam o que é ser zero de equação e qual a sua utilidade.

##### **Conteúdos:**

Monômios, polinômios, grau de polinômios, raiz de polinômios, equações do primeiro e segundo grau.

##### **Recursos Didáticos:**

Giz, quadro, lista de exercícios, papel quadriculado.

## **Encaminhamento metodológico:**

### **1. Monômios**

Primeiramente vamos perguntar para os alunos se imaginam quais as vantagens de usar letras em uma expressão matemática. A partir de suas respostas iremos explicar que um dos principais motivos da utilização de letras em expressões matemáticas é para a generalização. A fim de esclarecer a ideia de generalização apresentaremos o exemplo do cálculo da área de um quadrado de lado 2 cm, o qual é 4 cm<sup>2</sup>. Mas e se quisermos obter a área de um quadrado, portanto podemos generalizar uma expressão para calcular a área de qualquer quadrado como sendo  $l^2$ . Nesse sentido,  $l^2$  é um monômio.

Definição: Um monômio é um número ou uma expressão algébrica formada pelo produto de um número por uma ou mais variáveis afetadas por expoentes que são números naturais. (MODERNA, 2006)

Usaremos como situação também a área de um retângulo. Logo tomando um retângulo de base  $b$  e altura  $h$  concluímos que sua área será  $A = b \cdot h$  e a partir desse monômio assim como o da área do quadrado mostraremos a parte literal, o coeficiente e o grau.

Exemplificaremos alguns monômios e mostraremos qual é a parte literal e coeficiente de um monômio. Além disso, iremos mostrar como encontrar o grau de um monômio.

### **2. Polinômios**

Para introduzir polinômio, vamos desenhar duas figuras, representando caixas, uma com dimensões de  $2x$  (altura),  $x$  (comprimento) e  $2x$  (largura) e outra com dimensões de  $x$  (altura),  $3x$  (comprimento) e  $3$  (largura), então vamos calcular, juntamente com os alunos, a soma do volume dessas duas figuras. Obtendo uma expressão em soma de monômios. Vamos definir polinômio como sendo:

Definição: Polinômio é uma soma finita de monômios (MODERNA, 2006).

Posteriormente vamos apresentar exemplos de polinômios e de como determinar o grau de um polinômio e como escrevê-lo em sua forma completa.

### **3. Raiz de polinômios**

Primeiramente perguntaremos para os alunos se eles têm uma ideia do que seria uma raiz de um polinômio, após passaremos sua definição seguidamente de alguns exemplos.

Definição: é denotado  $x$  uma raiz do polinômio  $P(x)$  quando se tem  $P(x) = 0$

Exemplo 1:

$$P(x) = x^2 + 2x - 3$$

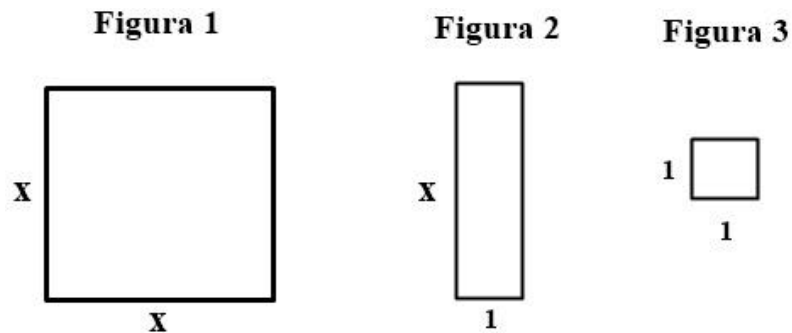
Portanto,  $x = 1$  é a raiz do polinômio  $P(x)$ .

#### 4. Operações entre polinômios

Do mesmo modo que foi introduzido polinômios, iremos utilizar área de figuras para fazer as operações entre polinômios. O exercício abaixo será utilizado para realizar operações de adição e subtração.

1) Seja um quadrado de lado  $x$  (Figura 1), um retângulo de lados  $x$  e  $1$  (Figura 2), e um quadrado de lado  $1$  (Figura 3), conforme figuras abaixo.

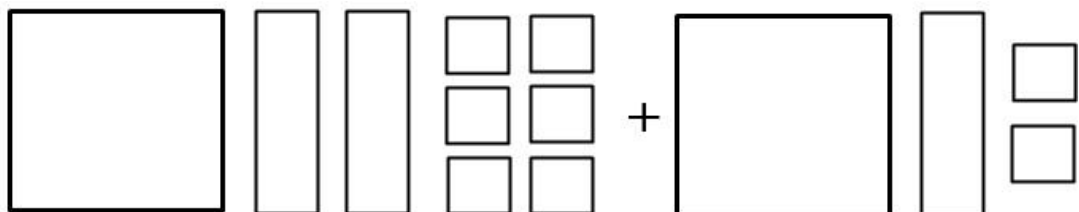
Figura 16: Área de polinômios



Fonte: Acervo dos autores

a) Qual a soma entre as áreas das figuras abaixo? Expresse o resultado da operação indicada em forma de expressão algébrica, classificando em monômio, binômio, trinômio ou polinômio.

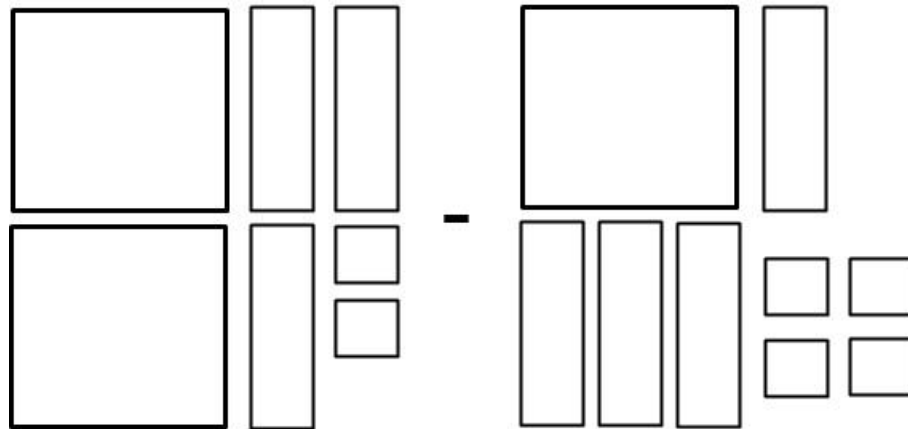
Figura 17: Soma de polinômios



Fonte: Acervo dos autores

b) Qual a soma das áreas entre as figuras abaixo? Expresse o resultado da operação e classifique.

**Figura 18: Subtração de polinômios**



**Fonte:** Acervo dos autores

Para que a atividade seja resolvida, será utilizado soma de monômios, para encontrar o polinômio e a partir disso será resolvida a operação de adição entre polinômios. Do mesmo modo irá ocorrer no segundo caso.

No item a, é esperado que os alunos resolvam da seguinte maneira,  $(x^2 + x + x + 6) + (x^2 + x + 2)$ , e que ao somar os polinômios encontrem  $2x^2 + 3x + 8$ , classificando assim como um trinômio.

No item b, é esperado que os alunos encontrem a seguinte expressão,  $(2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 4x + 4)$ , após a resolução da subtração encontrando  $x^2 - 2x - 2$  e classificando como um trinômio.

Depois de ambientar os alunos com expressões algébricas, faremos a multiplicação e a divisão com expressões algébricas dadas. Em primeiro momento, faremos a multiplicação, utilizando dois binômios a seguir, encontrando um trinômio,

$$(x + 1) \times (x - 2) = x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x - 2.$$

Depois, os alunos deverão multiplicar o polinômio encontrado por  $(x - 1)$ . Encontrando assim um novo polinômio,

$$(x^2 - x - 2) \times (x - 1) = x^3 - x^2 - 2x - x^2 + x + 2 = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

## 5. Fatoração

Primeiramente explicaremos que fatorar um número significa expressá-lo como um produto. Logo após mostraremos alguns tipos de fatorações:

Identificação de fatores comuns:

$$P(x) = 6x^2 + 9x$$

$$P(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 3 \cdot x$$

$$P(x) = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 3 \cdot 3 \cdot x$$

$$P(x) = 3x (2x + 3)$$

Fatoração por agrupamento

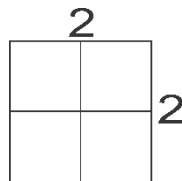
$$P(x) = 6x (x - 3) - 7(x - 3)$$

$$P(x) = (6x - 7) \cdot (x - 3)$$

## 6. Produtos notáveis

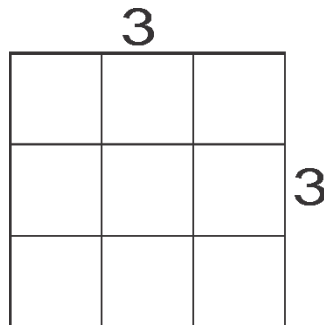
Introduziremos produtos notáveis associando a área, pediremos para representarem os produtos  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$ . Induziremos os alunos associarem a interpretação geométrica da multiplicação como uma área.

**Figura 19: Representação 2x2**



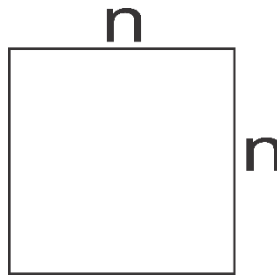
**Fonte:** Acervo dos autores

**Figura 20: Representação 3x3**

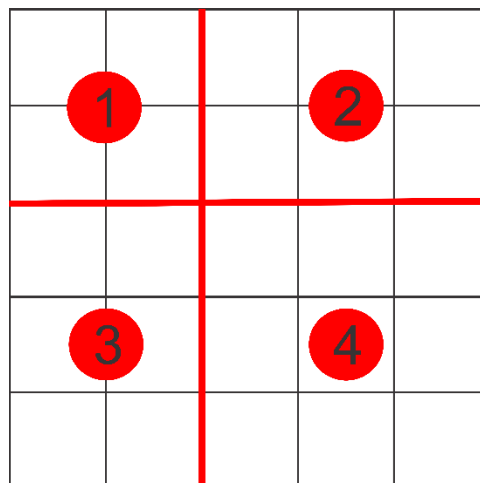


**Fonte:** Acervo dos autores

Formalizaremos que como as figuras têm as mesmas dimensões teremos a área de uma figura quadrada que é dada por  $1 \times 1 = 1^2$ , logo temos  $2 \times 2 = 2^2$  e  $3 \times 3 = 3^2$ . Em seguida questionaremos como podemos representar a área de um quadrado qualquer. Consideraremos as dimensões desse quadrado como  $n$ , logo  $n \times n = n^2$ :

**Figura 21: Representação  $n \times n$** **Fonte:** Acervo dos autores

Em seguida pediremos que façam a representação utilizando o papel quadriculado, da expressão  $(2+3)^2$ , sem adicionar os algoritmos 2 e 3. Depois de deixarmos analisarem a situação por um tempo, explicaremos que seria a área de um quadrado de lado 5, com a seguinte representação:

**Figura 22: Representação  $(2 \times 3)^2$** **Fonte:** Acervo dos autores

Identificaremos as quatro figuras formadas como dois quadrados e dois retângulos, pediremos que calculem as áreas de cada uma das figuras. Teremos:

Área total = Área da Figura 1 + Área da figura 2 + Área da Figura 3 + Área da figura

4

$$(2+3)^2 = 2^2 + (2 \times 3) + (3 \times 2) + 3^2$$

Como  $(2 \times 3) + (3 \times 2) = 2 \times (2 \times 3)$ , segue que:

$(2+3)^2 = 2^2 + 2 \times (2 \times 3) + 3^2$ , a partir disso formalizaremos algebricamente que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Mostraremos um material manipulável que pode representar esse produto notável. Em seguida, realizaremos o cálculo algébrico de  $(a + b)^3$ :

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) \\
 &= (a + b)^2(a + b) \\
 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \\
 &= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b) \\
 &= a^2a + a^2b + 2aba + 2abb + b^2a + b^2b \\
 &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

Mostraremos que podemos associar com a ideia de representação de volume, sendo, sendo o volume de dois cubos e de seis paralelepípedos. Mostraremos um material manipulável com esta representação.

Explicaremos que existem outros produtos notáveis que serão apresentados na lista de exercícios para eles calcularem.

## 7. Equações

Para introduzir utilizaremos o problema apresentado em Dante (2009, p.101), conforme segue:

Um terreno retangular tem 18m a menos de largura do que de comprimento. O perímetro do terreno é de 84 m. Qual é o comprimento do terreno? E qual é a largura?

Durante a resolução será explicado cada passo e as propriedades algébricas utilizadas. Posteriormente, passaremos a definição de equação.

Definição: “Equação é uma sentença matemática que contém uma ou mais incógnitas e é expressa por uma igualdade.” (IEZZI, DOLCE e MACHADO, 2009, p. 93).

Além disso, vamos utilizar outra definição de Editora Moderna (2006).

Definição: Equação do primeiro grau cuja incógnita é  $x$  é uma igualdade que pode ser escrita na forma  $ax + b = 0$ , com  $a$  diferente de zero.

## 8. Raiz da equação

Para trabalhar com raiz da equação vamos utilizar um problema que aborda a maneira que os egípcios calculavam o valor que resolvia uma igualdade e uma comparação. Este problema foi retirado da dissertação de Souza (2016): o valor de “aha” se “aha” e um sétimo de “aha” é 19. Com isso

Para solucionar o problema os egípcios utilizavam uma técnica denominada método falsa posição. Esse método consistia em escolher um valor arbitrário para “aha” e a partir deste valor eles faziam os cálculos e comparavam com o resultado, mas provavelmente não era o resultado esperado. Por isso eles utilizavam um fator de correção para obter o valor correto de “aha”, ou seja, o valor que satisfaz a expressão. Seguindo o método egípcio vamos resolver o problema e encontrar o valor de “aha”. (SOUZA, 2016).

Após isso vamos elaborar o problema conforme a matemática moderna, isto é, determine o valor que somado a sua sétima parte é 19. Então iremos relacionar a maneira com que os egípcios utilizavam para satisfazer seu problema com a raiz de uma equação do primeiro grau. Diante disso, vamos resolver junto com os alunos a maneira que os egípcios pensavam. Posteriormente, vamos transcrever o problema para a matemática moderna, então explicaremos o que é a raiz de uma equação e iremos obtê-la através das propriedades algébricas. Ou seja, teremos a equação  $x + \frac{1}{7}x = 19$ .

Posteriormente, vamos abordar equação do segundo grau. Primeiramente enunciaremos a definição de equação do segundo grau

Definição:  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ . Onde  $a, b$  e  $c$  são números reais e  $x$  é a incógnita.

Adiante, vamos dar um exemplo escrito de duas maneiras:

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \text{ e } 2x^2 + 5x = 3$$

Com isso, pediremos aos alunos se eles sabem como se obtém as raízes de uma equação de grau 2, por ser usual na escola acreditamos que alguns respondam *Bhaskara*, então, diante disso, perguntaremos se sabe o motivo de poder usar esta fórmula. Para que os alunos tenham uma noção de que as fórmulas são construídas a partir de definições conhecidas, utilizaremos a definição de equação do segundo grau para chegar até a fórmula resolutive de equação do segundo grau (*Bhaskara*), ou seja, demonstraremos esta fórmula.

## 9. Lista de Exercícios

A lista de exercícios no Apêndice I, será baseada em exercícios do ENEM e vestibulares, abordando conteúdos expostos em aula. A lista será resolvida durante a aula pelos alunos, e conforme o andamento faremos a correção no quadro das questões abordadas.

## Avaliação:

A avaliação ocorrerá de maneira contínua durante a aula e usaremos a produção escrita dos alunos para na próxima aula retomar conceitos que tiveram dificuldade, para isto utilizaremos o problema do Apêndice II, de acordo com Descomplica (2019). Ainda nesta aula

levaremos em conta as resoluções que foram apresentadas pelos participantes no primeiro encontro.

## Referências

EDITORA MODERNA. (Org.) BARROSO, Juliane Matsubara (ed.responsável). **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2006.

DESCOMPLICA. **Questão 169**. Disponível em: <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2010/segundo-dia/o-salto-triplo-e-uma-modalidade-atletismo-em-que-o-atleta-da-um-salto-em-um-pe-uma-passada/>>. Acesso em: 11 abr. 2019.

PASQUETTI, Camila. **Proposta de aprendizagem de polinômios através de materiais concretos**. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – Uri, Erechim/RR, 2008. Disponível em: <[http://www.uri.com.br/cursos/arq\\_trabalhos\\_usuario/845.pdf](http://www.uri.com.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/845.pdf)>. Acesso em: 08 maio 2019.

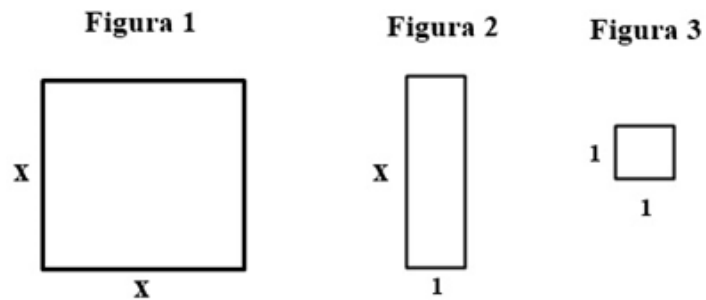
SOUZA, Francisca Alves de. **O ensino de polinômios utilizando a história da matemática como recurso didático**. 2016. 108 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática-profmat, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

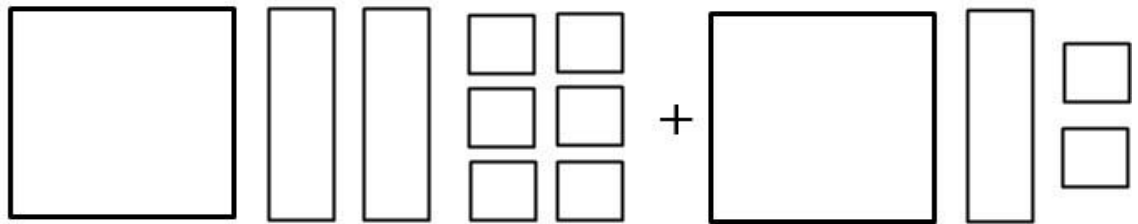
## Apêndice I

|                                                                                     |                                                                                                |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br><b>PROMAT 2019 – 4º Encontro</b> |  |
| <b>NOME:</b>                                                                        | <b>DATA: 11/05/2019</b>                                                                        |  |

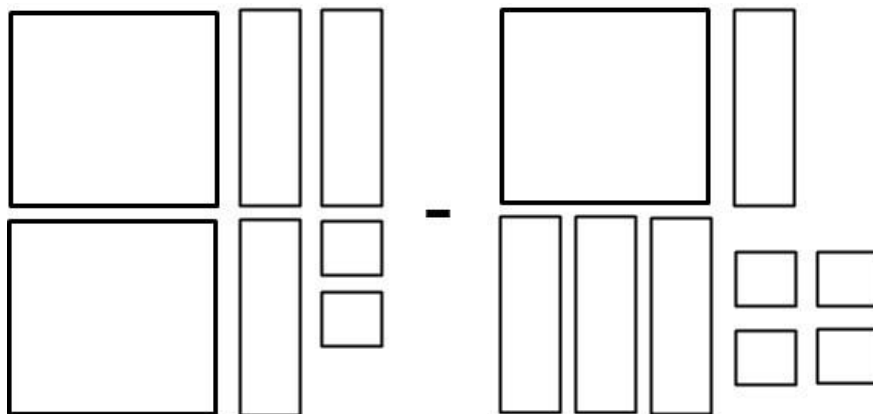
- 1) Seja um quadrado de lado  $x$  (Figura 1), um retângulo de lados  $x$  e 1 (Figura 2), e um quadrado de lado 1 (Figura 3), conforme figuras abaixo.



a) Qual a soma entre as áreas das figuras abaixo? Expresse o resultado da operação indicada em forma de expressão algébrica, classificando em monômio, binômio, trinômio ou polinômio.



b) Qual a soma das áreas entre as figuras abaixo? Expresse o resultado da operação e classifique.



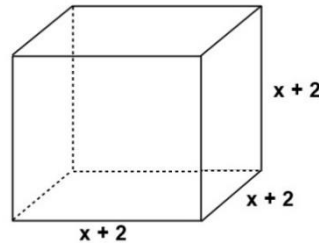
2) Quanto é  $(x + 1)$  multiplicado por  $(x - 2)$ ? E se você multiplicar esse resultado por  $(x - 1)$ ?

3) E o que acontecerá se eu dividir o resultado encontrado no item anterior por  $(x - 2)$ ?

4) Um terreno retangular tem 18m a menos de largura do que de comprimento. O perímetro do terreno é de 84m. Qual é o comprimento do terreno? E qual é a largura?

### Exercícios complementares

1) A figura abaixo é um cubo com arestas  $(x + 2)$ , sabendo que o cubo tem perímetro de 512 centímetros, qual é a medida da aresta?



2) Determine o valor de  $k$  no polinômio:

a)  $P(x) = x^3 + 7x^2 - kx + 3$ , sabendo que  $x = -1$  é raiz do polinômio.

b)  $P(x) = 4x^4 - 8x^3 - (k + 5)x^2 + (3k - 2)x + 5 - k$ , sabendo que  $x = 2$  é raiz do polinômio.

4) (ENEM 2011) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade  $q$  de produtos é dado por uma função, simbolizada por  $CT$ , enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade  $q$  também é uma função, simbolizada por  $FT$ . O lucro total ( $LT$ ) obtido pela venda da quantidade  $q$  de produtos é dado pela expressão  $LT(q) = FT(q) - CT(q)$

Considerando-se as funções  $FT(q) = 5q$  e  $CT(q) = 2q + 12$  como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

5) (PUCRJ 2014) Sabendo que 1 é raiz do polinômio  $P(x) = 2x^3 - ax^2 - 2x$ , podemos afirmar que  $P(x)$  é igual a:

- a)  $2x^2(x - 2)$
- b)  $2x(x - 1)(x + 1)$
- c)  $2x(x^2 - 2)$
- d)  $x(x - 1)(x + 1)$

e)  $x(2x^2 - 2x - 1)$

6) Produtos notáveis são expressões algébricas que podem ser pré-estabelecidas em casos particulares. Os produtos notáveis possuem fórmulas gerais, que, por sua vez são simplificações de produtos algébricos, com grande importância de conhecer suas fórmulas, pois agilizam os cálculos. Encontre as expressões de acordo com fórmulas fatoradas a seguir:

a)  $(a + b)^3 =$

b)  $(a - b)^2 =$

c)  $(a + b)(a - b) =$

d)  $(a + b)^3 =$

e)  $(a - b)^3 =$

f)  $(a + b + c)^3 =$

7) (ENEM 2013) A temperatura  $T$  de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ( $t = 0$ ) e varia de acordo com a expressão

$$T(t) = \frac{-t^2}{4} + 400, \text{ com } t \text{ em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada}$$

para abertura quando o forno atinge a temperatura de  $39^\circ\text{C}$ .

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0

b) 19,8

c) 20,0

d) 38,0

e) 39,0

## Apêndice II

O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado. Disponível em: [www.cbat.org.br](http://www.cbat.org.br) (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, qual a distância a ser alcançada no primeiro salto?

### 2.3.4.1. Relatório

#### Relatório do dia 11/05/2019 (4 horas-aula)

Aos onze dias do mês de maio de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-104, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o terceiro encontro do mesmo.

Iniciamos a aula questionando o motivo de usarmos letras para representações matemáticas, para então começar a introduzir monômio através da área de figuras. No quadro foi desenhado um quadrado, mostrando que a área da figura foi representada por um monômio. Também foi explicado o que é parte literal, coeficiente e grau de monômio.

Encaminhando a atividade do mesmo modo que anteriormente, calculamos o volume do cubo, resultando em um binômio. Também, durante a realização, evidenciamos a parte literal de cada expressão, o coeficiente e o grau dos polinômios encontrados. No final da atividade, foi definido trinômio e polinômio.

**Figura 23: Atividade polinômios**



**Fonte:** Acervo dos autores

Depois de concluir a definição, explicamos o que é raiz de um polinômio e utilizamos um exemplo, somente introduzindo o conceito para ser utilizado posteriormente, na parte de equações.

Para trabalhar com operações, mostramos um exemplo de como deveria ser realizada a atividade, a partir disso deixamos que os alunos tentassem resolver. Durante a resolução, notamos que muitos alunos tinham dificuldade na adição de polinômios, em muitas resoluções notamos que os alunos tentavam somar  $x^3 + x^2$  e ainda assim encontravam algum resultado. Durante a correção desse exercício ressaltamos que somente os termos semelhantes, com mesmo grau, podem ser somados, ou seja, ao somar  $2x^2 + x^2$ , somamos os coeficientes e mantemos a parte literal.

Para a operação de subtração os alunos já haviam entendido o processo e resolveram com mais facilidade do que a atividade anterior. Muitos alunos mencionaram que o “jogo de sinal” deveria ser realizado para remover os parênteses.

Na atividade de multiplicação de polinômios, houve uma grande dificuldade em iniciar o processo. Para isso, explicamos que a propriedade distributiva na multiplicação poderia ser usada para a resolução, também reforçamos que do mesmo modo que ocorre com números naturais  $3 \cdot 3 = 3^1 + 3^1 = 3^{1+1} = 3^2$  e  $4 \cdot 4 = 4^1 \cdot 4^1 = 4^{1+1} = 4^2$ , irá acontecer com a parte literal dos polinômios, ou seja,  $x \cdot x = x^1 \cdot x^1 = x^{1+1} = x^2$ .

Para abordar fatoração, explicamos que a fatoração é utilizada para expressar formas mais simples de expressões. Mostramos exemplos básicos para identificar fatores comuns e colocá-los em evidência. Também exemplificamos a fatoração por agrupamento.

Para inserir produtos notáveis, em primeiro momento foi desenhado quadrados no quadro, de dimensão 2 e 3. O quadrado de dimensão 2 vou subdividido em 4 quadrados, para que os alunos fizessem a interpretação geométrica da área do quadrado e, posteriormente, foi feito o mesmo com o quadrado de dimensão 3. Em seguida, foi pedido aos alunos como seria a representação de um quadrado de lado  $n$ , alguns alunos disseram que invés de colocar um número, seria utilizado o  $n$ , então a área é dada por  $n \times n = n^2$ .

Após esta atividade, foi perguntado para os alunos como é a representação geométrica de  $(2 + 3)^2$ , mas sem obter a soma. Os alunos tiveram dificuldade de pensar nesta representação, então foi resolvido no quadro juntamente com o auxílio dos alunos e, com isso, foi formalizado  $(a + b)^2$ . Para abordar  $(a + b)^3$  foi desenvolvido o produto algebricamente e para visualização foi utilizado um material manipulável utilizando cubos e paralelepípedos.

**Figura 24: Atividade produtos notáveis**



**Fonte:** Acervo dos autores

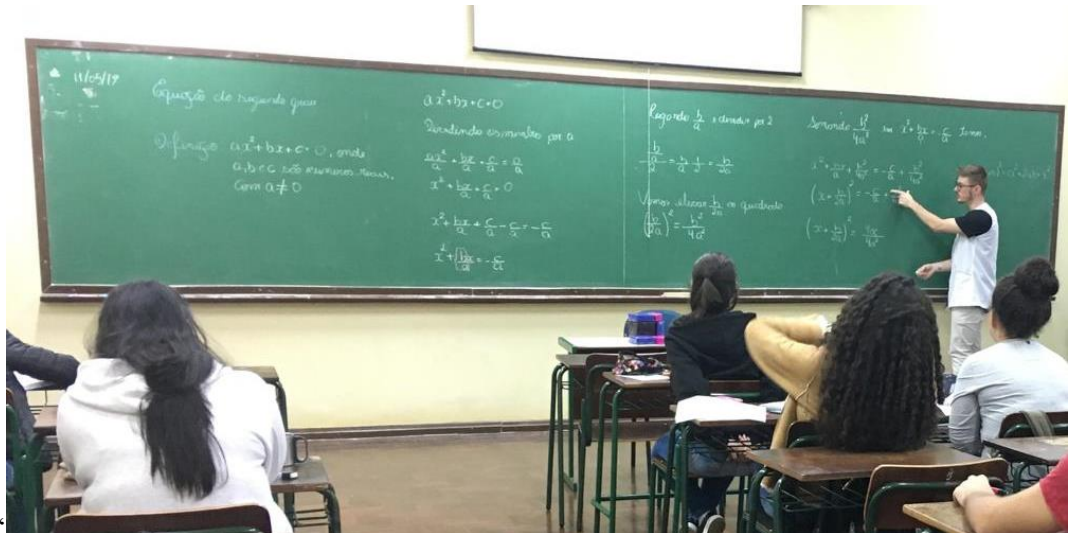
Na abordagem de equações, inicialmente foi trabalhado com equação do primeiro grau. Para isso utilizamos um problema que envolve perímetro e incógnita. Em primeiro momento, os alunos precisavam fazer a interpretação geométrica do problema, então pedimos para algum aluno desenhar no quadro a sua interpretação. Diante disso, fomos perguntando aos alunos como resolver este problema, e em cada passo pedíamos a justificativa do que estava sendo efetuado (operações algébricas em equações) até obter o resultado. Concluído este problema, foi falado um pouco sobre equação e a etimologia da palavra para que os alunos compreendessem o motivo da igualdade entre expressões numéricas e algébricas. Posteriormente, utilizamos duas definições de equação do primeiro grau, uma definição mais geral e outra mais específica.

Para trabalhar raiz de uma equação, perguntamos para os alunos o que seria a raiz de uma equação. Alguns deles responderam que raiz é o que zera a equação, diante disso, pedimos qual era a raiz da equação encontrada no problema do perímetro, como não obtivemos respostas para isso, voltamos ao problema explicamos qual seria a raiz da equação. Além disso, mostrar que a ideia de equação e raiz é muito antiga, utilizamos o problema egípcio. Percebemos que

este problema despertou interesse, então, após resolver o problema egípcio, pedimos para os alunos como seria este problema escrito utilizando a matemática moderna, alguns responderam que seria  $x + \frac{1}{7}x = 19$ .

Adiante, definimos equação do segundo grau e perguntamos quantas raízes admite uma equação do segundo grau e como obtê-las, alguns alunos responderam que tem duas raízes e para calcular é utilizado a fórmula de *Bhaskara*. Diante disso, perguntamos se eles sabiam o motivo de poder usar esta fórmula para resolver uma equação do segundo grau, não tivemos nenhuma resposta, então a partir da definição de equação do segundo grau fizemos a demonstração/dedução da fórmula resolutive de equação do segundo grau. Neste procedimento, foi possível utilizar vários conceitos que foram abordados em aulas anteriores, portanto revisamos tais conceitos junto a demonstração. Assim que foi terminada a demonstração, alguns alunos se surpreenderam e então comentamos que os objetos em matemáticas não surgem instantaneamente, mas são construídos e por trás de cada fórmula, por mais simples que seja, existe uma construção envolvida.

**Figura 25: Demonstração de Bhaskara**



**Fonte:** Acervo dos autores

Assim que concluímos a abordagem dos assuntos desta aula, utilizamos o restante do tempo para que os alunos resolvessem os exercícios complementares da lista e, durante a resolução, fomos os auxiliando. Além disso, entregamos a questão avaliativa e pedimos para que resolvessem.

Analisando as produções da questão avaliativa, notamos que apenas três alunos escreveram as distâncias de cada salto corretamente e manipularam as expressões até encontrar o resultado de 7,1 metros, sendo que dois desses alunos resolveram a atividade de maneira idêntica, deixando indícios de que isso ocorreu pelo fato de estarem trabalhando em dupla. Dois alunos montaram a expressão considerando que a distância diminuía em relação ao alcance anterior, porém não desenvolveram a expressão para encontrar a distância do primeiro salto. Dois alunos não consideraram o primeiro salto para montar a expressão e quatro alunos consideraram apenas o terceiro salto, resolvendo do seguinte modo " $x - 1,2 - 1,5 = 17,4$ ", encontrando " $x = 20,1$ ", porém nenhum dos alunos comentou o que foi esse valor encontrado, mas dois colocaram a unidade de medida. Em uma resolução, o aluno não considerou que o alcance diminuía em relação ao anterior e sua expressão foi a seguinte " $x + (x - 1,5) + (x - 1,2) = 17,4$ ", e no esboço ao lado da resolução, com o esboço em sua produção, podemos notar que o aluno pode ter entendido que a distância entre o primeiro e o segundo salto foi  $x - 1,5$  e que entre o segundo e o terceiro a distância foi  $x - 1,2$ , e também que  $x = 17,4$ . Dois alunos escreveram " $x + (-1,2x) - 1,5x = \frac{17,4}{2,7} = 6,4\text{m}$ " e podemos inferir que os alunos tentaram manipular a expressão algébrica para encontrar o valor de  $x$ , mas em suas produções não escreveram o que significava cada parcela da expressão. Apenas um aluno não produziu nenhuma expressão algébrica, somente escreveu "15.5 ou 16.2 nem sei".

## **2.4. Módulo 2 – Conjuntos Numéricos, Função Afim e Função Quadrática**

### **2.4.1. Plano de aula do dia 18/05/2019**

#### **PROMAT – 5º ENCONTRO 18/05/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Identificar conjuntos numéricos, relembrar a ideia de função afim e função do primeiro grau.

##### **Objetivos Específicos:**

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

Ao se trabalhar Conjuntos Numéricos, objetiva-se que o aluno seja capaz de reconhecer conjuntos numéricos e empregar a simbologia adequada a cada situação.

Ao se trabalhar com intervalos, objetiva-se que os alunos sejam capazes de operar com intervalos e compreender a simbologia, tanto quanto a forma geométrica.

Ao trabalhar com história da função, objetiva-se que os alunos compreendam um pouco de como a noção de função era utilizada no passado, para que servia e qual a utilidade atualmente.

Ao trabalhar com função objetiva-se introduzir noções básicas sobre o assunto, trabalhar função crescente, decrescente e contínua e seus domínios, imagens e contradomínios vistos em gráficos e no diagrama de Venn.

Ao trabalhar com gráficos objetiva-se introduzir o assunto de forma mais intuitiva visando trabalhar o comportamento de um gráfico a partir de um acontecimento mais casual.

##### **Conteúdos:**

Conjuntos numéricos, intervalos numéricos, interpretação de operações entre intervalos, função.

### Recursos Didáticos:

Giz, quadro, lista de exercícios, jogo da memória.

### Encaminhamento metodológico:

#### 1. Conjuntos numéricos

Iniciaremos a aula apresentando um quadro da intitulado a “matemática invisível”, no qual apresentaremos alguns aspectos básicos da matemática que muitas vezes passam despercebidos, tais como o zero à direita, após a vírgula; o sinal de um número positivo e o denominador de um número inteiro, como sendo 1, dentre outros. Esses são os seguintes conceitos:

$$10 = 10,0$$

Existe um ponto decimal no final de todo número inteiro.

$$6 = +6$$

Há um sinal positivo a esquerda de cada número.

\*a não ser que já esteja um sinal – (negativo).

$$3 = \frac{3}{1}$$

Todos os números inteiros possuem denominador 1.

$$x = 1x$$

Existe o coeficiente 1 a esquerda de toda variável.

\*a não ser que já tenha um número. Ex.  $2x$

$$7 = 7^1$$

O expoente 1 pode ser acrescentado em todos os números inteiros.

$$125^0 = 1$$

O número 1 pode ser escrito como qualquer número elevado a zero.

Símbolos da multiplicação:

|                |           |
|----------------|-----------|
| $ab$           | $a(b)$    |
| $a \times (b)$ |           |
| $a \cdot (b)$  | $a * (b)$ |

Símbolos da divisão:

|                     |               |
|---------------------|---------------|
| $a \div b$          | $\frac{a}{b}$ |
| $a \underline{) b}$ | $a / b$       |

Em seguida, questionaremos os alunos sobre o que é um conjunto, explicaremos que um conjunto é uma coleção ou uma reunião de objetos, os quais são chamados de elementos. Apresentaremos alguns exemplos de conjuntos, explicando que os conjuntos são representados por letras maiúsculas, e seus elementos devem ser listados entre chaves ou deve ser apresentada uma regra ou lei que estabelece que elementos fazem ou não parte do conjunto. Exemplos:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$C = \{a, e, i, o, u\}$$

$$D = \{x; x \text{ é uma fruta}\}$$

Utilizando a tabela abaixo, explicaremos que quando queremos dizer que um elemento faz parte do conjunto, então este elemento pertence a este conjunto e quando não faz parte do conjunto o elemento não pertence ao conjunto, por exemplo,  $1 \in A$  e  $6 \notin A$ . Quando todos os elementos de um conjunto pertencem a outro conjunto podemos dizer que esse conjunto está contido no outro, por exemplo  $A \subset B$ , pois todos os elementos de A pertencem a B.

**Quadro 8: Teoria dos conjuntos**

| Teoria dos Conjuntos – Símbolos |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| $\ni$ : Pertence                | $\notin$ : Não pertence          |
| $\exists$ : Existe              | $\nexists$ : Não Existe          |
| $\subset$ : Está contido        | $\not\subset$ : Não está contido |
| $\supset$ : Contém              | $\not\supset$ : Não contém       |
| $\cup$ : União                  | $\cap$ : Intersecção             |
| $\forall$ : Para todo           | $\emptyset$ : Vazio              |

**Fonte:** Acervo dos autores

Em seguida, falaremos sobre os Conjuntos Numéricos, que são uma coleção ou reunião de números que possuem características semelhantes. Utilizaremos o diagrama de *Venn* para explicar os conjuntos numéricos, sendo exposto o conjunto dos Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

- Naturais ( $\mathbb{N}$ )

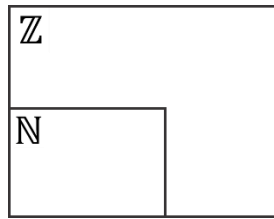
**Figura 26: Conjuntos Naturais****Fonte:** Acervo dos autores

O conjunto dos números naturais (símbolo  $\mathbb{N}$ ):

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Neste conjunto são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação.

- Inteiros ( $\mathbb{Z}$ )

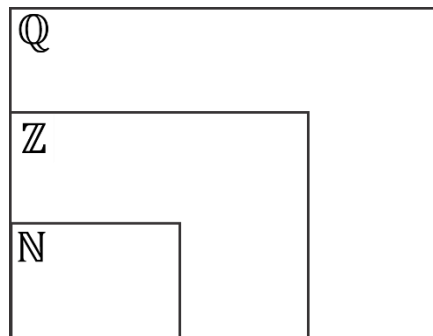
**Figura 27: Conjunto Inteiros****Fonte:** Acervo dos autores

Definição: O conjunto dos números inteiros (símbolo  $\mathbb{Z}$ ):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Neste conjunto são definidas as operações de adição, multiplicação e subtração, estabelecendo que  $a - b = a + (-b)$ , e para todos  $a, b \in \mathbb{Z}$

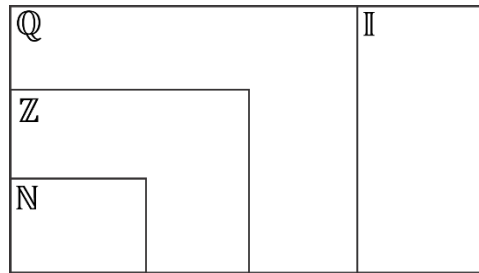
- Racionais ( $\mathbb{Q}$ )

**Figura 28: Conjunto Racionais****Fonte:** Acervo dos autores

Definição: Chama-se conjunto dos números racionais o (símbolo  $\mathbb{Q}$ ) o conjunto dos pares ordenados (ou frações)  $\frac{a}{b}$ , o qual  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{Z}^*$

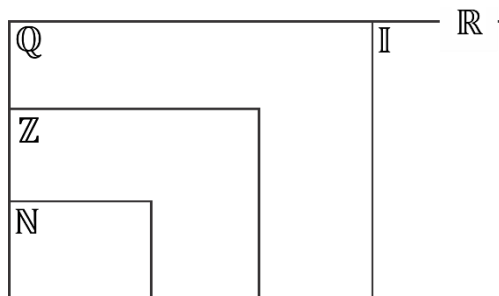
Neste conjunto são definidas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, sendo que  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$  para  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ .

- Irracionais ( $\mathbb{I}$ )

**Figura 29: Conjunto Irracionais****Fonte:** Acervo dos autores

Definição: Chama-se conjunto dos números irracionais (I) o número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são os números reais que não são racionais.

- Reais ( $\mathbb{R}$ )

**Figura 30: Conjunto Reais****Fonte:** Acervo dos autores

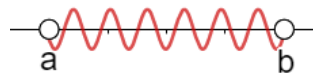
Definição: Chama-se conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) a união entre o conjunto dos números Racionais e Irracionais.

## 2. Intervalos

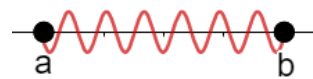
Para essa atividade, será utilizado uma tabela com alguns símbolos que serão utilizados no decorrer das próximas atividades.

Vamos iniciar a atividade explicando que intervalos são conjuntos de números reais, com algumas características específicas, ligadas a continuidade, ou seja, intervalo aberto ou fechado, conforme definições abaixo. Também definiremos intervalo aberto e fechado e suas respectivas notações, exemplificando geometricamente os conceitos abordados.

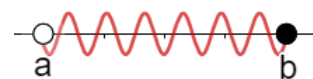
Intervalo aberto de extremos  $a$  e  $b$ , representado por  $(a, b)$ , ou geometricamente representado por:

**Figura 31: Intervalo aberto****Fonte:** Acervo dos autores

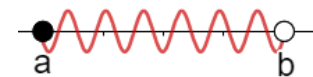
Intervalo fechado de extremos  $a$  e  $b$ , representado por  $[a,b]$ , ou geometricamente representado por:

**Figura 32: Intervalo fechado****Fonte:** Acervo dos autores

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, representado por  $(a,b]$ , ou geometricamente representado por:

**Figura 33: Intervalo semi-aberto****Fonte:** Acervo dos autores

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, representado por  $[a,b)$ , ou geometricamente representado por:

**Figura 34: Intervalo semi-fechado****Fonte:** Acervo dos autores

Como intervalos são conjuntos, trabalharemos com definição de união, intersecção e diferença entre conjuntos.

Definição I: A união entre dois conjuntos  $A$  e  $B$  corresponde aos elementos que pertencem a  $A$  ou  $B$ , representada por  $A \cup B$ .

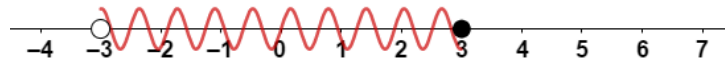
Definição II: A intersecção entre dois conjuntos A e B corresponde aos elementos que pertencem simultaneamente a A e B, representada por  $A \cap B$ .

Definição III: A diferença entre dois conjuntos A e B corresponde aos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B, representada por  $A - B$ .

Alguns exemplos estão listados abaixo.

Intervalo  $A = \{x \in \mathbb{R}; -3 < x \leq 3\}$  ou  $(-3, 3]$ .

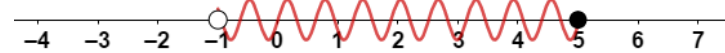
**Figura 35: Intervalo A**



**Fonte:** Acervo dos autores

Intervalo  $B = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 5\}$  ou  $(-1, 5]$ .

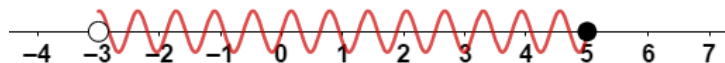
**Figura 36: Intervalo B**



**Fonte:** Acervo dos autores

Intervalo  $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}; -3 < x \leq 5\}$  ou  $(-3, 5]$ .

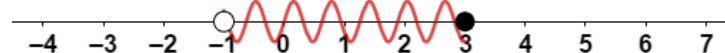
**Figura 37: União de intervalos**



**Fonte:** Acervo dos autores

Intervalo  $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 3\}$  ou  $(-1, 3]$ .

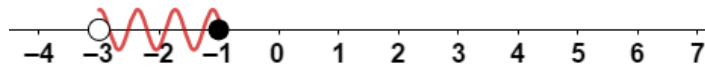
**Figura 38: Intersecção de intervalos**



**Fonte:** Acervo dos autores

Intervalo  $A - B = \{x \in \mathbb{R}; -3 < x \leq -1\}$  ou  $(-3, -1]$ .

Figura 39: Diferença de intervalos



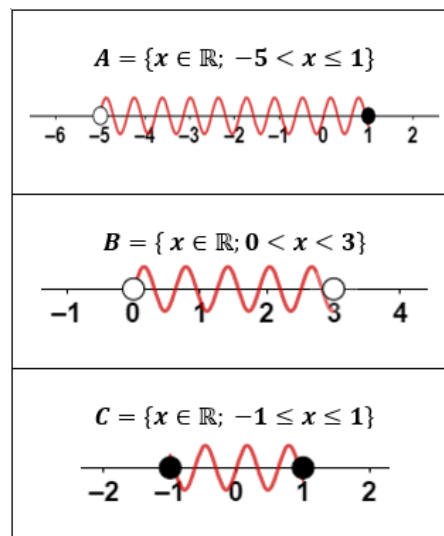
Fonte: Acervo dos autores

### 3. Jogo da Memória

Será aplicado um jogo da memória, no qual será dado três intervalos e a partir desses, deverá ser realizado união, intersecção e diferença entre os conjuntos para que o jogo da memória possa ser desenvolvido.

Para que a atividade comece, os alunos deverão formar duplas e escolher outra dupla para jogar ser o oponente. Cada dupla irá receber uma lista com os intervalos  $A, B, C$ , e também as operações que estão no jogo, o intervalo. Essa lista, deverá ser usada como material de apoio. Segue na figura abaixo intervalos  $A, B, C$ .

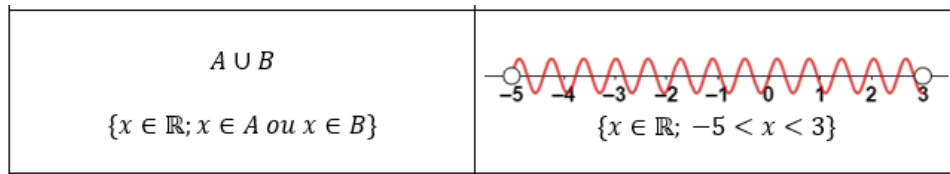
Figura 40: Intervalos para jogo



Fonte: Acervo dos autores

As peças devem estar viradas para baixo, para que se inicie o jogo, uma dupla deverá começar virando duas peças para cima, eles podem pegar as cartas somente se o intervalo virado seja correspondente à operação que leva à aquele intervalo, conforme exemplo abaixo.

Figura 41: Exemplo jogo da memória



Fonte: Acervo dos autores

Ganha a dupla que conseguir o maior número de pares.

Essa atividade será realizada para a fixação do conteúdo de conjuntos, de modo que durante o jogo os alunos possam sanar suas dúvidas de intervalos e operações entre conjuntos.

#### 4. História da Função

Neste momento, vamos abordar um pouco da história da função, para que os alunos tenham noção de que função não é somente uma expressão, em que se deve obter a imagem de um valor  $x$ . Além disso, iremos falar sobre a importância dessa concepção atualmente em matemática e como está apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+, isto é

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2006, p.121).

Posteriormente, vamos trabalhar com a ideia de função como aplicação de dois conjuntos, utilizando, para isso, o Diagrama de *Venn*. Neste momento não iremos falar sobre domínio, contradomínio e imagem, somente que uma função vai de um conjunto em outro e que todo elemento do primeiro conjunto deve estar relacionado com pelo menos um elemento do segundo conjunto (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

#### 5. Domínio, Contra - domínio e imagem de função.

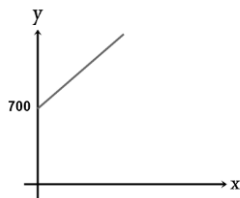
Introduziremos uma noção intuitiva de domínio, contradomínio e imagem utilizando o diagrama de Venn.

Introduziremos o assunto de funções contínua, crescente e decrescente com um problema. Pediremos então para os alunos tentarem resolver e logo após falaremos sobre ele a partir das opções disponíveis na questão.

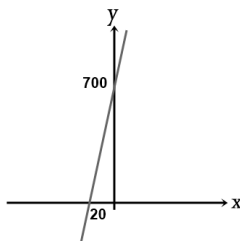
**6. Gráficos de função.**

1) Paulo trabalha como vendedor em uma loja de eletrodomésticos, com um salário mensal de R\$ 700,00 fixos e uma parte variável, que corresponde a R\$ 20,00 por aparelho vendido. Qual gráfico abaixo melhor representa seu salário em função das vendas?

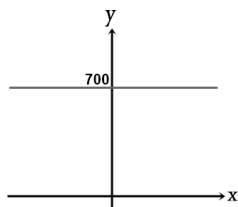
a)



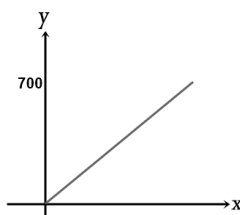
b)



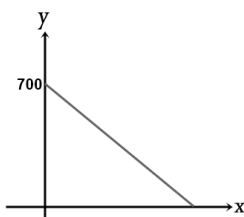
c)



d)



e)



Falaremos agora sobre os intervalos de crescimento e decréscimo de uma função e suas representações gráficas.

**Função crescente:** Uma função  $f$  é crescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 < x_2$ , tem-se  $f(x_1) < f(x_2)$ . Noção intuitiva: Quanto maior o valor de  $x$ , maior o valor de  $y$ .

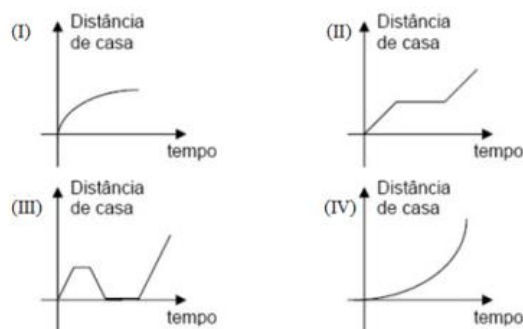
**Função decrescente:** Uma função  $f$  é decrescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_1 < x_2$ , tem-se  $f(x_1) > f(x_2)$ . Noção intuitiva: Quanto maior o valor de  $x$ , menor o valor de  $y$ .

**Função constante:** Qualquer  $x$  do domínio possui mesma imagem. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo.

Logo após, passaremos a atividade de Stewart (2013, p.19) para reconhecimento de gráficos onde os alunos terão que associar cada gráfico correspondente com uma das histórias no problema inserido.

Qual gráfico melhor se enquadra nas três histórias seguintes? Escreva uma história para o gráfico restante.

- a) Eu tinha acabado de sair de casa, quando percebi que havia esquecido meus livros; então eu voltei para buscá-los.
- b) Tudo ia bem até que o pneu furou.
- c) Eu iniciei calmamente, mas aumentei a velocidade quando me dei conta de que iria me atrasar.



<sup>1</sup> Adaptado de Jan Terwl "Real Maths in Cooperative Groups in Secondary Education". Em *Cooperative Learning in Mathematics*, editado por Neal Davidson, p. 234. (Addison Wesley, 1990)

## 7. Lista de Exercícios

Na lista de exercícios (Apêndice I) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também será abordado questões complementares de ENEM. Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade.

Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extra.

### Avaliação:

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes.

Escolhemos dois problemas de Stewart (2013, p.19) que abordam noções de função, para ser recolhida para avaliação dos conteúdos abordados em aula. Os problemas escolhidos estão no Apêndice II.

### Referências

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no ensino médio**, volume 1. São Paulo: Scipione, 1999.

IEZZI, Gelson; DOMINGUES, Hygino H. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

STEWART, James. **Cálculo**: volume 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

### Apêndice I

|                                                                                     |                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br><b>PROMAT 2019 – 5º Encontro</b> |
| <b>NOME:</b>                                                                        | <b>DATA: 18/05/2019</b>                                                                        |

### Conjuntos numéricos

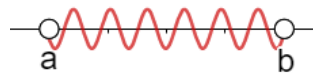
#### TEORIA DOS CONJUNTOS

|                                 |                         |
|---------------------------------|-------------------------|
| Teoria dos Conjuntos – Símbolos |                         |
| $\ni$ : Pertence                | $\notin$ : Não pertence |

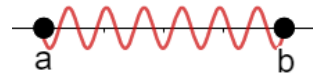
|                          |                                  |
|--------------------------|----------------------------------|
| $\exists$ : Existe       | $\nexists$ : Não Existe          |
| $\subset$ : Está contido | $\not\subset$ : Não está contido |
| $\supset$ : Contém       | $\not\supset$ : Não contém       |
| $\cup$ : União           | $\cap$ : Intersecção             |
| $\forall$ : Para todo    | $\emptyset$ : Vazio              |

### Intervalos

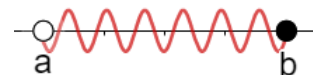
Intervalo aberto de extremos a e b, representado por  $(a, b)$ , ou geometricamente representado por:



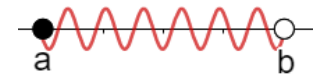
Intervalo fechado de extremos a e b, representado por  $[a, b]$ , ou geometricamente representado por:



Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, representado por  $(a, b]$ , ou geometricamente representado por:



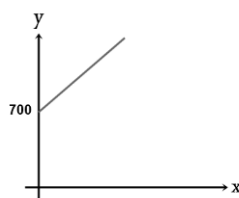
Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, representado por  $[a, b)$ , ou geometricamente representado por:



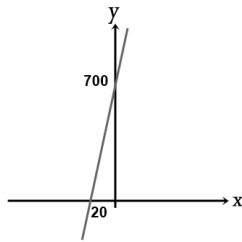
### Exercícios

1) Paulo trabalha como vendedor em uma loja de eletrodomésticos, com um salário mensal de R\$ 700,00 fixos e uma parte variável, que corresponde a R\$ 20,00 por aparelho vendido. Qual gráfico abaixo melhor representa seu salário em função das vendas?

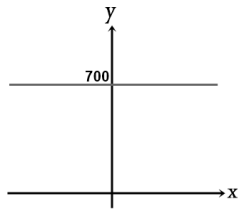
a)



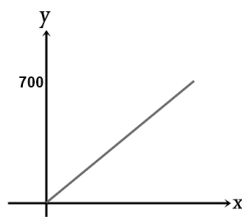
b)



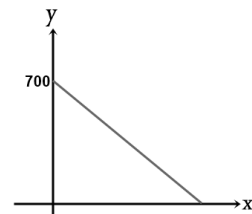
c)



d)



e)

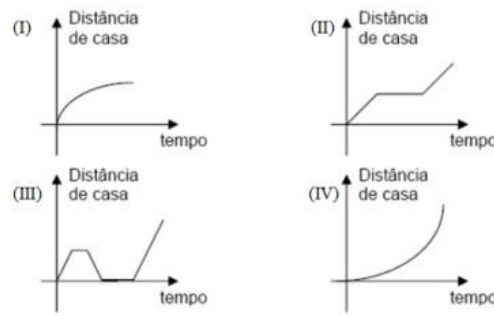


2) Qual gráfico melhor se enquadra nas três histórias seguintes? Escreva uma história para o gráfico restante.

a) Eu tinha acabado de sair de casa, quando percebi que havia esquecido meus livros; então eu voltei para buscá-los.

b) Tudo ia bem até que o pneu furou.

c) Eu iniciei calmamente, mas aumentei a velocidade quando me dei conta de que iria me atrasar.



<sup>1</sup> Adaptado de Jan Terwl "Real Maths in Cooperative Groups in Secondary Education". Em *Cooperative Learning in Mathematics*, editado por Neal Davidson, p. 234. (Addison Wesley, 1990)

### Exercícios complementares

1) Examine se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas:

- a) Se  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{Z}$ , então  $(a + b) \in \mathbb{Z}$
- b) Se  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{Z}$ , então  $(a - b) \in \mathbb{Z}$
- c) Se  $x \in \mathbb{Z}$ , então  $(1 - 3x) \in \mathbb{Z}$
- d) Se  $p \in \mathbb{N}$ , então  $(3p - 3) \in \mathbb{N}$
- e) Se  $p \in \mathbb{Z}$ , então  $(3p - 3) \in \mathbb{Z}$

2) (UFPA) Um professor de Matemática, ao lecionar Teoria dos Conjuntos em uma certa turma, realizou uma pesquisa sobre as preferências clubísticas de seus  $n$  alunos, tendo chegado ao seguinte resultado:

- 23 alunos torcem pelo Paysandu Sport Club;
- 23 alunos torcem pelo Clube do Remo;
- 15 alunos torcem pelo Clube de Regatas Vasco da Gama;
- 6 alunos torcem pelo Paysandu e pelo Vasco;
- 5 alunos torcem pelo Vasco e pelo Remo.

Se designarmos por  $A$  o conjunto dos torcedores do Paysandu, por  $B$  o conjunto dos torcedores do Remo e por  $C$  o conjunto dos torcedores do Vasco, todos da referida turma, teremos, evidentemente,  $A \cap B = \emptyset$ . Concluímos que o número  $n$  de alunos dessa turma é:

- a) 49
- b) 50
- c) 47
- d) 45
- e) 46

3) (ENEM 2014) O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

| Taxa de doação de sangue, por região, em 2010 |           |                      |                     |
|-----------------------------------------------|-----------|----------------------|---------------------|
| Região                                        | Doadores  | Número de habitantes | Doadores/habitantes |
| Nordeste                                      | 820 959   | 53 081 950           | 1,5%                |
| Norte                                         | 232 079   | 15 864 454           | 1,5%                |
| Sudeste                                       | 1 521 766 | 80 364 410           | 1,9%                |
| Centro-Oeste                                  | 362 334   | 14 058 094           | 2,6%                |
| Sul                                           | 690 391   | 27 386 891           | 2,5%                |
| Total                                         | 3 627 529 | 190 755 799          | 1,9%                |

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue. A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

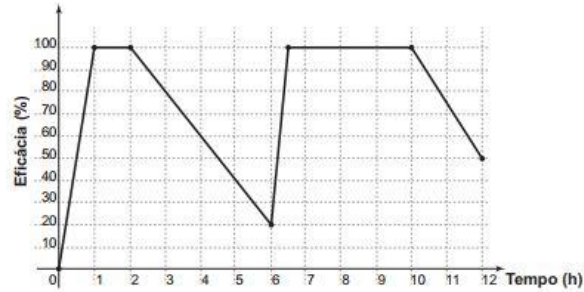
As regiões brasileiras onde foram intensificadas campanhas na época são:

- a) Norte, Centro-Oeste e Sul.
- b) Norte, Nordeste e Sudeste.
- c) Nordeste, Norte e Sul.
- d) Nordeste, Sudeste e Sul.
- e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

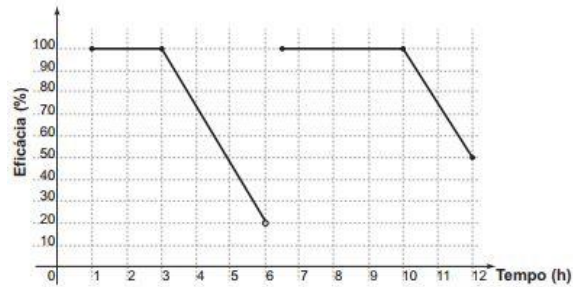
4) (ENEM 2016) Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1h até atingir a máxima eficácia (100%) e permaneceu em máxima eficácia durante 2h. Após essas 2h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5h e permanecendo em 100% por 3,5h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?

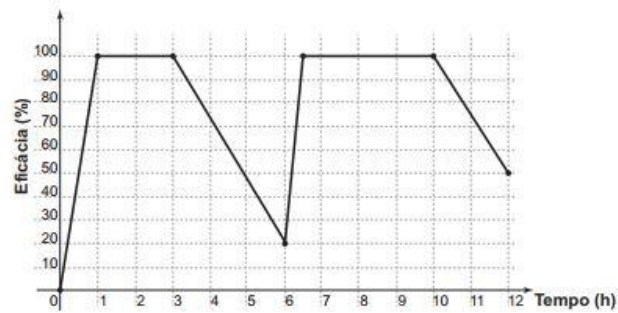
a)



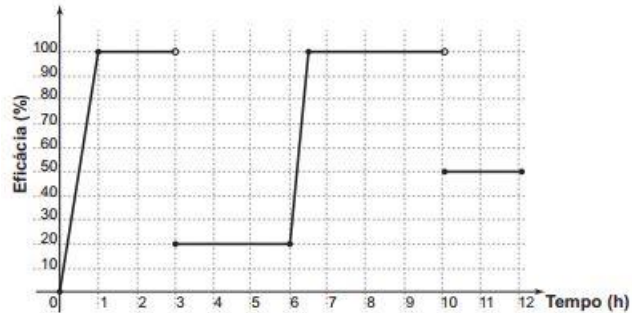
b)



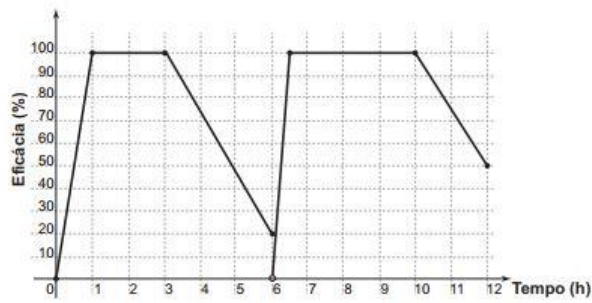
c)



d)

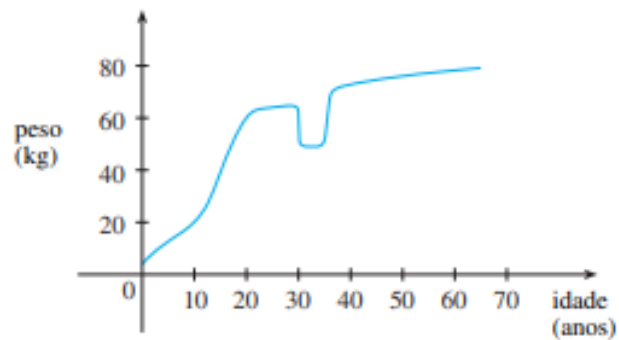


e)

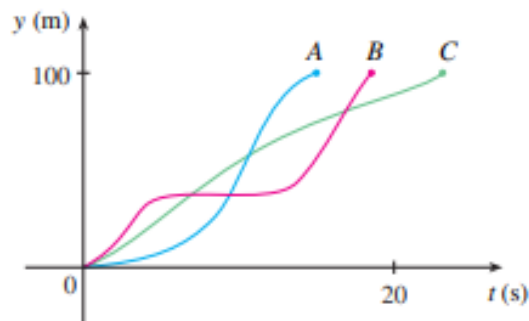


## Apêndice II

1) O gráfico mostra o peso de uma certa pessoa como uma função da idade. Descreva em forma de texto como o peso dessa pessoa varia com o tempo. O que você acha que aconteceu quando essa pessoa tinha 30 anos?



2) Três corredores competem em uma corrida de 100 metros. O gráfico representa a distância da corrida como uma função de tempo para cada corredor. Descreva o que o gráfico diz sobre esta corrida. Quem ganhou? Todos os corredores finalizaram a prova?



#### 2.4.1.1. Relatório

##### Relatório do dia 18/05/2019 (4 horas-aula)

Aos dezoito dias do mês de maio de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE, na sala de número A-104, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o quinto encontro do mesmo.

Iniciamos a aula colando o painel Matemática invisível no quadro negro e realizando a leitura dele, ao questionarmos em relação as dúvidas relacionadas aos conceitos apresentados, os alunos demonstraram ter entendido respondendo que não tinha nenhuma dúvida.

Em seguida, explicamos os conjuntos numéricos utilizando lâminas para facilitar a visualização e o tempo, pois são diversas definições em relação ao conteúdo. Apresentamos uma tabela com os símbolos da teoria dos conjuntos, foi bastante questionado sobre as relações de pertinência e contingência, pois apresentaram dificuldades em compreender a diferença entre elas, utilizamos exemplos específicos para ajudá-los a entender. Uma dúvida que surgiu e foi esclarecida durante a explicação dos números inteiros foi relacionada a etimologia do nome, pois o símbolo do conjunto é o  $\mathbb{Z}$ .

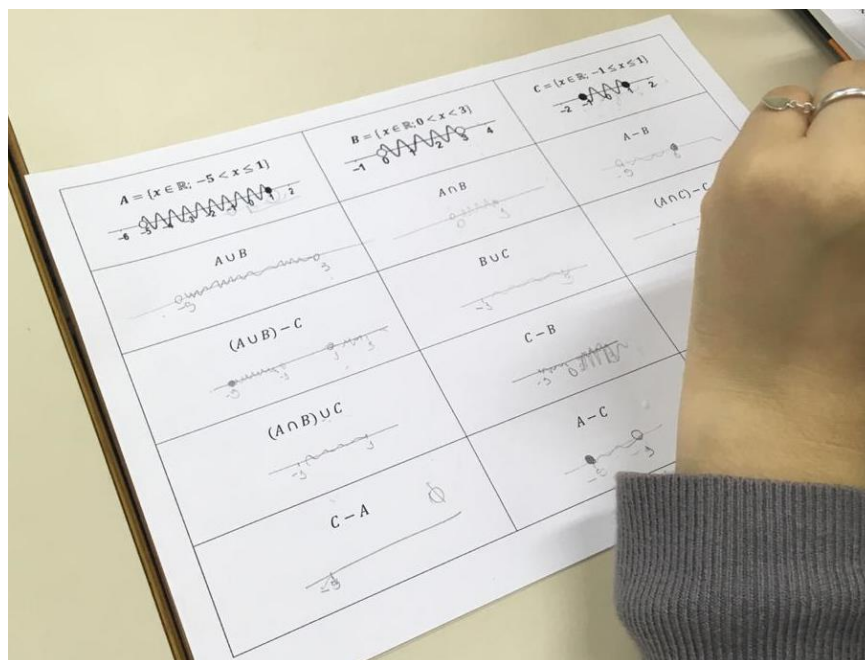
Para trabalhar com intervalos, comentamos quais são os possíveis tipos de intervalo, sendo eles fechado, aberto, aberto pela direita e fechado pela esquerda, fechado pela direita e aberto pela esquerda, exemplificamos com dois intervalos A e B. Também realizamos um exemplo de cada operação (união, intersecção e diferença) com os intervalos A e B, a cada operação mostrávamos outras formas de representar os intervalos, através da notação de conjunto e também a notação de intervalos, frisando sempre a ideia de que como estávamos operando com os números reais, então haverá sempre infinitos números entre 1 e 2, entre 2 e 3, e assim sucessivamente. Para fixação, utilizamos o jogo da memória.

Iniciamos o jogo da memória entregando os jogos para os quartetos, passamos as instruções de jogos e pedimos para iniciarem. Alguns grupos hesitaram para começar a jogar, mas alguns rapidamente já foram resolvendo as operações no material de apoio, conforme figura abaixo.

Notamos uma grande dificuldade no início da resolução dos exercícios, na maioria dos grupos, porém, todos se mostraram interessados e solicitavam ajuda. Alguns grupos optaram

por resolver o material de apoio inicialmente, já outros, iniciaram jogando e construíram os intervalos de acordo com as peças que iam pegando.

**Figura 42: Resolução jogo da memória**



**Fonte:** Acervo dos autores

A partir da metade da atividade, os alunos já estavam motivados a encontrar os pares e não só em resolver as operações. Também, notamos que alguns alunos estavam resolvendo as operações e colocando o resultado como um conjunto finito de números, por exemplo  $A - C = \{-5, -4, -3, -2\}$  vendo isso, reforçamos o conceito de intervalos na reta real, pois esse conjunto representado é formado apenas pelos números inteiros e não com todos os reais. Por fim, alguns grupos conseguiram terminar a atividade e ver quem seria o ganhador, outros grupos não conseguiram completar a atividade a tempo.

Nesta parte da aula, introduzimos partes históricas das funções, bem como a etimologia da palavra função. Percebemos que vários alunos reagiram de maneira positiva, pois não conheciam sobre a historicidade deste conceito, mas somente algoritmos e aplicações.

Além disso, passamos a definição de uma função qualquer, utilizando o diagrama de Venn, isto é, que todo elemento do primeiro conjunto deve estar relacionado com apenas um elemento do segundo conjunto. Neste momento da aula, uma aluna fez um comentário que havia aprendido com seu professor que, do mesmo modo, a definição pode ser pensada como “cada homem tem apenas uma mulher”, esta maneira de pensar auxilia a lembrar da definição,

então pedimos para que ela repetisse seu comentário para que a turma pudesse ouvi-la novamente.

Em seguida introduzimos o assunto de domínio, contra domínio e imagem (exemplificando com diagrama de *Venn*), notamos uma boa familiaridade do assunto com os alunos proporcionando assim um bom diálogo durante o encaminhamento. Utilizando a definição pensada pela aluna associamos assim as definições propostas possibilitando aos alunos uma visualização melhor e proporcionando a eles uma aproximação com os conceitos.

Logo após, passamos uma atividade onde os discentes eram instruídos a associar o gráfico com a situação dada. Foi notado que a maioria pensava corretamente, porém alguns alunos obtiveram respostas equivocadas. O fato de os alunos estarem sentados em grupo durante essa atividade foi de grande importância para a aprendizagem deles, pois, quando um aluno concluía um diagnóstico diferente dos demais gerava um questionamento entre eles e, conseqüentemente, cada aluno explicava aos demais do grupo sua forma de pensar ao chegar na resolução. Depois de muito diálogo, conversamos sobre a atividade no quadro fazendo questionamentos sobre o porquê não poderia ser cada determinado gráfico e assim definindo função crescente, decrescente e constante.

Em sequência lançamos outra questão a eles para que continuassem a exercitar a associação das situações aos gráficos. Percebemos também muita interação e questionamentos entre os alunos nos grupos. Após terminada as associações fizemos a correção oral e conversamos sobre como poderia ser escrita a história referente ao gráfico que restou. Alguns alunos voluntariamente leram suas histórias. Observamos que a maioria escreveu um relato coerente concluindo assim bons resultados com as aplicações dessas atividades, referente a associações. Nas apresentações das definições tivemos muita participação dos alunos o que foi muito importante para o desenvolvimento da aula e para nossa avaliação da aprendizagem deles.

Em seguida, deixamos que os alunos resolvessem a lista de questões e fomos auxiliando-os individualmente.

Por fim, entregamos duas questões como tarefa avaliativa que segue e a recolhemos, como nos outros encontros. O objetivo das tarefas era observar como os alunos interpretam um gráfico no plano cartesiano e de que maneira associam este gráfico a uma situação real.

Na primeira questão, vinte e quatro alunos entregaram a questão resolvida. Doze escreveram que a pessoa emagreceu e associaram a perda de peso a alguma situação específica como, por exemplo, “passou por problemas de saúde”, “ele teve uma depressão”. Onze alunos escreveram que a pessoa perdeu peso aos 30 anos, mas não associaram o emagrecimento com algum fator. Apenas um estudante não mencionou a perda de peso, mas a sua produção escrita,

“ele uso drogas”, nos forneceu um indício de que ele compreendeu que aos 30 anos ele perdeu peso, pois é comum a associação do uso de drogas à perda de peso.

Na segunda questão, vinte e quatro alunos entregaram a questão resolvida, sendo que apenas quatro alunos respondem que o corredor A ganhou, todos terminaram e descreveram o que o gráfico diz sobre a corrida. Dez alunos responderam que o ganhador foi o corredor A e que todos conseguiram concluir a corrida, em uma das respostas, o aluno comenta “sim, todos terminaram a corrida, mas um deles chegou um pouco depois”. Um aluno respondeu que o corredor A ganhou, mas não respondeu se todos finalizaram a atividade. Dois alunos escreveram que o corredor A ganhou, porém comentaram que somente o corredor C não conseguiu concluir a prova em 20 segundos, nos fornecendo sinais de que escreveram isso pelo fato de no gráfico estar escrito apenas o tempo zero segundos e 20 segundos. Um dos alunos comentou “Ganhador A = Começou segundos antes e conseguiu percorrer toda a corrida antes dos parceiros”, porém o corredor A iniciou a corrida segundos depois dos outros, já outro aluno comentou que o corredor A ganhou e detalhou “o corredor A ganhou com o tempo de mais ou menos 9s, o corredor B ficou em segundo lugar com o tempo de mais ou menos 17s, e o corredor C ficou em último lugar com um tempo de 25s”. Um aluno responde apenas “todos ganharam”, e notamos que traçou uma linha que cruza o eixo y no ponto 100 metros, ou seja, há evidências de que o aluno entendeu que chegando no marco 100 metros, ganhava, diferentemente dos outros alunos que indicaram que somente ganhava quem chegasse primeiro. Outros quatro alunos escreveram que o ganhador foi o corredor C, sendo que um diz que todos finalizaram e outro diz que nem todos finalizaram.

#### **2.4.2. Plano de aula do dia 25/05/2019**

##### **PROMAT – 6º ENCONTRO 25/05/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Iniciando às 8h00, tendo um intervalo das 9h40 às 10h00. Retornando à aula até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Compreender o conceito de função do primeiro grau a partir da ideia de relação e dependência entre duas grandezas, suas representações algébrica e gráfica, bem como suas aplicações na resolução de situações problema.

##### **Objetivos Específicos:**

Introduzir o conceito de função de primeiro grau por meio de uma situação problema.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM que envolvem o conceito de função afim.

Abordar as diversas representações de uma função como a tabela, a lei algébrica e o gráfico.

Apresentar a definição de função polinomial do primeiro grau.

Trabalhar com domínio, imagem, contradomínio e raiz de uma função do primeiro grau.

##### **Conteúdos:**

Função afim.

##### **Recursos Didáticos:**

Quadro, giz, lista de exercícios, fichas com gráficos.

## Encaminhamento metodológico:

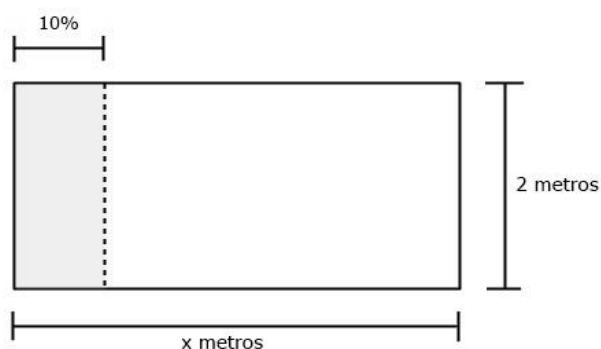
### 1. Problema dos tecidos

Vamos, primeiramente, abordar função do primeiro grau de maneira implícita, para isso será utilizado o seguinte problema:

Em uma loja, os tecidos são vendidos de maneira que a largura tenha 2m e o comprimento varie de acordo com a necessidade do cliente.

Ao comprar um tecido, um cliente solicitou que tivesse  $6\text{m}^2$  de área, sabe-se que este tecido encolhe 10% do comprimento após a primeira lavagem, o tecido está representado na figura abaixo.

**Figura 42: Área do tecido**



**Fonte:** Acervo dos autores

Então:

- Quanto mede comprimento do tecido?
- Qual a área do tecido após a primeira lavagem?
- Quanto o tecido perdeu em seu tamanho após a primeira lavagem?
- Na tabela, encontre qual será a área após a primeira lavagem para cada comprimento (x) estabelecido.

**Quadro 9: Área após a lavagem**

| Comprimento x | Área após lavagem f(x) |
|---------------|------------------------|
| 1m            |                        |
| 3m            |                        |
| 5m            |                        |
| 7m            |                        |

**Fonte:** Acervo dos autores

- e) Após o preenchimento do quadro, represente graficamente (no plano cartesiano dado) os valores obtidos.
- f) Apresente uma função,  $f(x)$ , que relacione a área após a primeira lavagem com o comprimento.
- g) Qual o comprimento que deve ser comprado para que a área após a lavagem seja de  $6\text{m}^2$ ?

Com isso, deixaremos que os alunos tentem resolver enquanto os auxiliamos em suas resoluções, posteriormente faremos a resolução no quadro, pedindo para os alunos que os alunos expressem as ideias utilizadas em suas resoluções.

## 2. Definição de função

Primeiramente apresentaremos uma sequência de perguntas relacionadas a uma situação exemplificando assim as definições de domínio, imagem, contradomínio e raiz de uma função.

**Problema: Adaptado Mota (2010)** Um banho de chuveiro elétrico de 15 minutos com o registro “meio aberto”, consome 45 litros de água. Se fecharmos o registro, ao nos ensaboar, reduzimos o tempo para 5 minutos e o consumo cai para 15 litros. Em uma residência onde mora apenas uma pessoa toma 1 banho por dia, existe uma caixa de água de 600 litros. Esta água pode ser aproveitada apenas para tomar banho. Utilizando o método reduzido para o mesmo:

- a) Quanto vai restar de água na caixa d’água depois de 7 dias, 25 dias e 32 dias?
- b) Se quiséssemos calcular para  $x$  dias, como faríamos?
- c) Quantos dias são necessários para que a água da caixa acabe?
- d) Quais os valores de  $x$  para que o gasto não exceda a quantidade total da caixa d’água?

Consequentemente, abordamos alguns conceitos para tipos de funções afim.

Uma função polinomial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se função afim quando existem números reais  $a$  e  $b$  tal que  $f(x) = ax + b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$

Uma função  $f(x) = ax + b$  é chamada de função constante se  $a = 0$ , então  $f(x) = b$

Uma função  $f(x) = ax + b$  é chamada de função polinomial de grau 1 se  $a \neq 0$

Uma função  $f(x) = ax + b$  é chamada de identidade quando  $a = 1$  e  $b = 0$ , então  $f(x) = x$

## 3. Representação semiótica

Uma função afim pode ser representada de maneiras diferentes, existem diversas representações semióticas para a função. Abordaremos as seguintes representações com os alunos: Linguagem textual (coeficientes e interceptos) – Representação gráfica – Representação tabular – Representação algébrica.

Explicaremos como realizar a conversão para cada uma das representações utilizando o exemplo da seguinte função:

a) Representação Algébrica

$$f(x) = 2x + 1$$

b) Linguagem textual: coeficientes

Coeficiente angular = 2

Coeficiente linear = 1

c) Linguagem textual: interceptos

$$\text{Intercepto } x = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{Intercepto } y = (0, 1)$$

d) Representação tabular

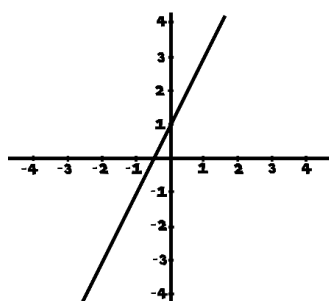
**Figura 43: Representação tabular**

| <b>x</b>  | <b>y</b>  |
|-----------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>3</b>  |
| <b>-1</b> | <b>-1</b> |

**Fonte:** Acervo dos autores

e) Representação gráfica

**Figura 44: Representação gráfica**



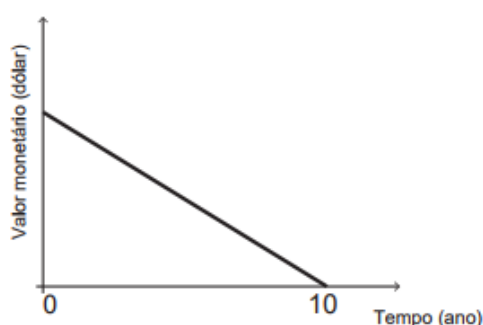
**Fonte:** Acervo dos autores

Questionaremos se caso tivéssemos somente o gráfico da função conseguiríamos encontrar as outras representações, utilizaremos o exemplo apresentado acima para mostrar a conversão partindo do gráfico.

Entregaremos para cada aluno a imagem de um gráfico e vamos propor que realizem o mesmo processo explicado anteriormente para encontrarem as demais representações da função apresentada no gráfico. Pediremos para relatarem oralmente ou no quadro as representações de cada uma das funções. Concluiremos as representações semióticas das funções propondo que respondam a seguinte questão:

(ENEM 2017) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.

**Figura 45: Valor monetário**



**Fonte:** <<https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2017-segunda-aplicacao/segundo-dia/um-sistema-de-depreciacao-linear-estabelecendo-que-apos-10-anos-o-valor-monetario-de-um-bem-sera/>>.

Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente. Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

- a) 30
- b) 60
- c) 75
- d) 240
- e) 300

Realizaremos a correção do exercício no quadro.

#### 4. Lista de Exercícios

Na lista de exercícios (Apêndice I) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também será abordado questões complementares de ENEM, vestibular e concurso e problemas do livro de Goulart (1999, p.124). Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade. Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extra.

### **Avaliação:**

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes. A questão escolhida é do livro de Moderna (2005, p.71) e está contida no apêndice II.

### **Referências**

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações** / Luiz Roberto Dante ed. 1 – São Paulo: Ática, 2010.

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no ensino médio**. São Paulo: Scipione, 1999.

MODERNA (Org.). **Matemática: Construção e significado**. São Paulo: Moderna, 2005.

MOTA, Sabrina Carvalho. **Função afim no cotidiano**. 2010. 55 f. Monografia (Especialização) - Curso de Especialização Matemática. Mídias Digitais e Didática: Tripé Para Formação de Professores de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, São Gabriel, 2010.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semióticas** (Dissertação de mestrado) – Londrina, 2007, 141f.

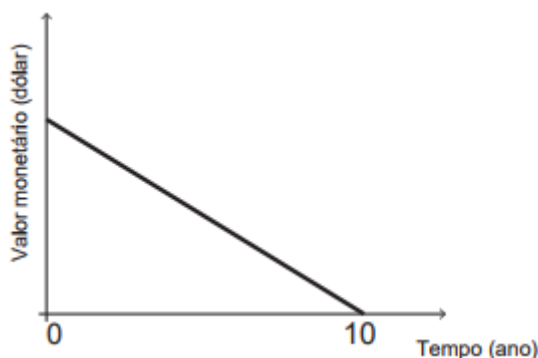
## Apêndice I

|                                                                                   |                                                                                                                                         |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | <p align="center"><b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b></p> <p align="center"><b>PROMAT 2019 – 6º Encontro</b></p> |  |
| <b>NOME:</b>                                                                      | <b>DATA: 25/05/2019</b>                                                                                                                 |  |

1) Um banho de chuveiro elétrico de 15 minutos com o registro “meio aberto”, consome 45 litros de água. Se fecharmos o registro, ao nos ensaboar, reduzimos o tempo para 5 minutos e o consumo cai para 15 litros. Em uma residência onde mora apenas uma pessoa, esta toma 1 banho por dia e existe uma caixa de água de 600 litros. Esta água pode ser aproveitada apenas para tomar banho. Utilizando o método reduzido para o mesmo:

- Quanto vai restar de água na caixa d’água depois de 7 dias, 25 dias e 32 dias?
- Se quiséssemos calcular para  $x$  dias, como faríamos?
- Quantos dias são necessários para que a água da caixa acabe?
- Quais os valores de  $x$  para que o gasto não exceda a quantidade total da caixa d’água?

2) (ENEM 2017) Um sistema de depreciação linear, estabelecendo que após 10 anos o valor monetário de um bem será zero, é usado nas declarações de imposto de renda de alguns países. O gráfico ilustra essa situação.



Uma pessoa adquiriu dois bens, A e B, pagando 1 200 e 900 dólares, respectivamente. Considerando as informações dadas, após 8 anos, qual será a diferença entre os valores monetários, em dólar, desses bens?

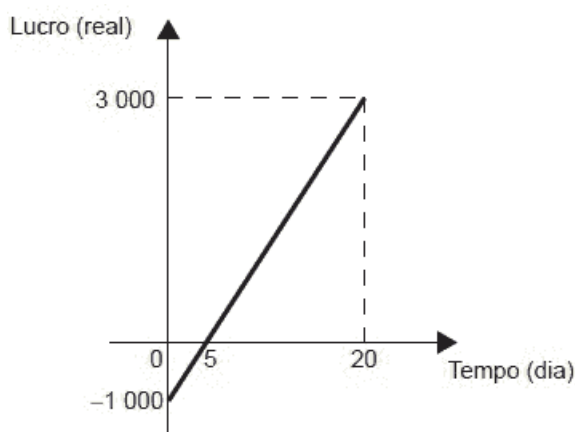
- 30
- 60
- 75
- 240

e) 300

### Exercícios complementares

1) (UE – PA) Nas feiras de artesanato de Belém do Pará, é comum, no período natalino, a venda de árvores de natal feitas com raiz de patchouli. Um artesão paraense resolveu incrementar sua produção investindo R\$ 300,00 na compra de matéria-prima para confeccioná-las ao preço de custo de R\$ 10,00 a unidade. Com a intenção de vender cada árvore ao preço de R\$ 25,00, quantas deverá vender para obter lucro?

2) (ENEM 2017) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é:

- a)  $L(t) = 20t + 3000$
- b)  $L(t) = 20t + 4000$
- c)  $L(t) = 200t$
- d)  $L(t) = 200t - 1000$
- e)  $L(t) = 200t + 3000$

3) (ENEM 2017) Uma empresa de entregas presta serviços para outras empresas que fabricam e vendem produtos. Os fabricantes dos produtos podem contratar um entre dois planos oferecidos pela empresa que faz as entregas. No plano A, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de R\$ 500,00, além de uma tarifa de R\$ 4,00 por cada quilograma enviado (para qualquer destino dentro da área de cobertura). No plano B, cobra-se uma taxa fixa mensal no valor de R\$ 200,00, porém a tarifa por cada quilograma enviado sobe para R\$ 6,00. Certo fabricante havia decidido contratar o plano A por um período de 6 meses. Contudo, ao perceber que ele precisará

enviar apenas 650 quilogramas de mercadoria durante todo o período, ele resolveu contratar o plano B.

Qual alternativa avalia corretamente a decisão final do fabricante de contratar o plano B?

- a) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R\$500,00 a menos do que o plano A custaria.
- b) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R\$1.500,00 a menos do que o plano A custaria.
- c) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R\$1.000,00 a mais do que o plano A custaria.
- d) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R\$1.300,00 a mais do que o plano A custaria.
- e) A decisão foi boa para o fabricante, pois o plano B custará ao todo R\$6.000,00 a mais do que o plano A custaria.

4) Um tipo de táxi cobra do usuário R\$ 4,00 de "bandeirada" (importância mínima fixada para qualquer distância) e mais R\$ 0,50 por quilômetro rodado. Como representar o que o passageiro irá pagar, em reais, ao final de um percurso de  $x$  km? A representação encontrada é linear? Quanto custaria uma corrida de 3 km e 6 km?

5) (ENEM 2009) Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R\$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R\$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de

- a) R\$ 90,00
- b) R\$ 110,00
- c) R\$ 130,00
- d) R\$ 150,00
- e) R\$ 170,00

6) (Cesgranrio) O valor de um carro novo é de R\$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R\$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

- a) R\$ 8.250,00
- b) R\$ 8.000,00
- c) R\$ 7.550,00
- d) R\$ 7.500,00
- e) R\$ 7.000,00

7) A tabela abaixo apresenta os valores cobrados por um estacionamento.

| Tempo            | Valor    |
|------------------|----------|
| até 2 horas      | R\$ 5,00 |
| Horas excedentes | R\$ 1,00 |

- a) Sabendo que há uma tolerância de 10 minutos, quanto um motorista pagaria por ter deixado seu carro estacionado durante 4 h e 30 min?
- b) Construa o gráfico do valor a ser pago  $v$  (em reais) em função do tempo  $t$  (em minutos) que o carro ficou estacionado, no intervalo  $0 < t < 300$ .

- Uma função polinomial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **função afim** quando existem números reais  $a$  e  $b$  tal que  $f(x) = ax + b$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- Uma função  $f(x) = ax + b$  é chamada de **função constante** se  $a = 0$ .

$$f(x) = b$$

- Uma função  $f(x) = ax + b$  é chamada de **função polinomial do 1 grau** se  $a \neq 0$

- Uma função  $f(x) = ax + b$  é chamada de **identidade** quando  $a=1$  e  $b=0$ .

$$f(x) = x$$

## Apêndice II

Dada uma função afim  $f(x) = ax + b$ , e conhecendo-se  $f(-1) = 7$  e  $f(4) = 2$ , determinar a lei de formação dessa função e o seu gráfico.

#### 2.4.2.1. Relatório

##### Relatório do dia 25/05/2019 (4 horas-aula)

Aos vinte e cinco dias do mês de maio de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-104, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o sexto encontro do mesmo.

Um problema relacionado a tecidos foi utilizado para introduzir a aula de função afim. Entregamos o problema impresso para os alunos e pedimos para que começassem a resolução, durante a resolução fomos acompanhando-os para dar dicas de como proceder quando houvesse dúvidas.

No item “a” não detectamos dificuldade em resolver, visto que acompanhamos a resolução dele. Entretanto, no item “b” percebemos que alguns alunos descontaram 10% da área, ao invés de 10% do comprimento, então quando víamos este tipo de caso pedíamos para que o aluno relese o enunciado afim de compreender que o desconto precisa ser feito sobre o comprimento, mas pedimos para esses mesmos alunos se o ao descontar 10% da área, iria obter o mesmo resultado descontando 10% do comprimento; muitos alunos ficaram na dúvida quanto a isso, portanto tiramos essa dúvida ao resolver o item no quadro. Já no item “c”, houve duas resoluções, uma calculando obtendo a diferença entre a área antes de lavado com a área depois de lavado, e a outra obtendo o produto de 10% de 3 com 2. Ao resolver no quadro explicamos das duas maneiras.

No item “d”, os alunos já estavam habituados com o procedimento e tiveram mais facilidade, mesmo assim, durante a correção desse item, frisamos o processo passo a passo envolvido para o preenchimento da tabela. No item “d”, notamos que alguns alunos não sabiam marcar os pontos no plano cartesiano, para isso, auxiliamos nas carteiras esse passo. Para a correção desse item, utilizamos o software *Geogebra* para mostrar os pontos encontrados e que ao ligar as os pontos, poderíamos ver uma linearidade entre os pontos.

No item “f”, notamos uma grande dificuldade para generalização, por isso, ao resolver no quadro, mostramos a regularidade na tabela, mostramos o que variava e o que sempre ficaria do mesmo modo, ou seja, constante, para então chegarmos a generalização, encontrando algumas formas possíveis para representar a função. Notamos, que alguns alunos expressaram

10% como  $\frac{10}{100}$ , por isso pedimos se eles notavam que  $\frac{10}{100} = 0,1$ , como resposta, obtivemos que o aluno entendia mais essa notação que foi utilizada na aula de porcentagem pois  $\frac{10}{100}$  representava “10 por 100”, ou seja, 10 partes de 100. Também, uma resolução que chamou atenção, foi a qual o aluno percebeu que o coeficiente angular seria 1,8, pois ao marcar os pontos no gráfico percebia que eles sempre aumentavam 1,8.

No item “g” não houve dificuldade, uma vez que os alunos haviam entendido o processo de construção da lei de formação da função. Então, resolvemos no quadro pedindo auxílio dos alunos. E, portanto, concluímos esta atividade.

Dando continuidade na aula aplicamos uma sequência de questões para chegar aos devidos conceitos.

Inicialmente alguns alunos tiveram dificuldades para entender o problema e iniciar sua resolução. Visualizamos no decorrer também a dificuldade ao inserir uma incógnita ao qual foi um pouco melhorada, percebendo ainda assim a insegurança dos discentes ao mexer com esse tipo de problema, ou melhor, com incógnitas inseridas em problemas matemáticos.

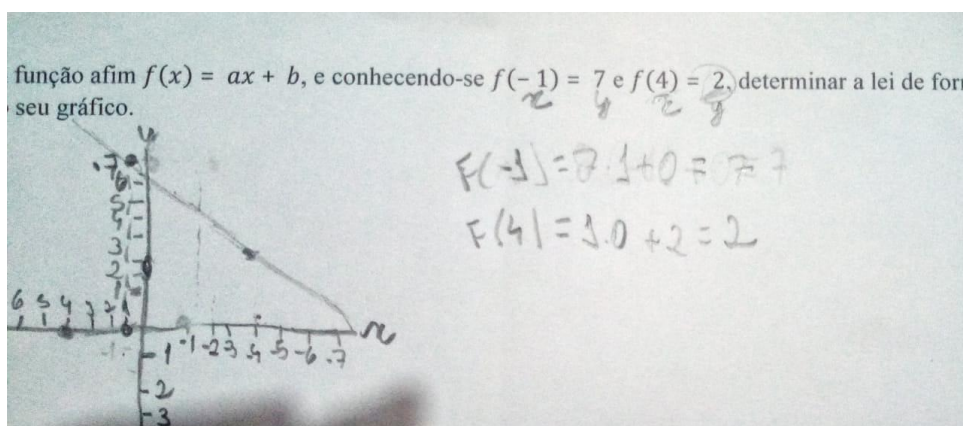
No item “c” ao qual trabalhamos com raiz da função notamos o conflito dos alunos ao associar a substituição de uma raiz da função com ela igualada a zero. Já no item “d” ao qual trabalhamos o domínio encontramos alguns questionamentos do tipo “x só pode ser menor que 40 ou x pode também ser 40?”. Esse questionamento gerou muitas dúvidas ao qual nos permitiu enfatizar a leitura do problema e os conceitos já trabalhados de intervalos.

Em seguida, iniciamos o conteúdo das representações semióticas de uma função de primeiro grau, para tanto foi escolhido uma função e realizado as representações: Algébricas, linguagem textual, tabular e gráfica. Durante o desenvolvimento das representações fomos sanando as dúvidas que surgiram.

Propomos que a partir do gráfico de uma função conseguissem encontrar as demais representações, entregamos para cada aluno um gráfico. Os alunos apresentaram um pouco de dificuldade na interpretação do gráfico, ou seja, encontrar os pares ordenados que os auxiliariam na resolução do problema, e que ao saberem o coeficiente y de forma imediata já tinham o coeficiente linear. No entanto todos conseguiram realizar a interpretação de ao menos um gráfico. Conforme iam concluindo foi entregue outros gráficos para que não ficassem dispersos enquanto esperavam os colegas concluírem a atividade. Realizamos também a correção de alguns gráficos no quadro negro, chamando os alunos que realizaram a interpretação do gráfico para registrarem os seus resultados no quadro.

A avaliação diagnóstica consiste em determinar a lei de formação de uma função afim dada dois de seus pontos e seu gráfico. Foram no total 18 resoluções entregues pelos alunos ali presentes sendo observado grande dificuldade no assunto ou situação que se encontravam ao precisar determinar a lei de formação da função. Todos os discentes mostraram ter adquirido conhecimento sobre o conteúdo trabalhado. Em alguns casos fazendo as tabelas para valores de  $x$  e  $y$ , determinando seus pontos a partir dos dados fornecidos na questão, e até mesmo substituindo os valores em  $f(x) = ax + b$  e em outros (em sua maioria), fazendo o esboço do gráfico da função. Alguns passos utilizados foram equivocados, uma vez que em muitos casos foi detectado a substituição dos dados fornecidos pelo problema de forma questionável, onde eram substituídos  $x$  e  $y$  de forma correta e eram inseridos um dos valores de  $y$  em  $a$  ou  $b$  como mostrado na figura a seguir:

**Figura 46: Resolução de aluno**



**Fonte:** Acervo dos autores

Valores não identificados apareceram nas resoluções. Somente um aluno conseguiu determinar a lei de formação da função, porém ele não soube fazer o gráfico.

### **2.4.3. Plano de aula do dia 01/06/2019**

#### **PROMAT – 7º ENCONTRO 01/06/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Compreender o conceito de função do segundo grau a partir da ideia de relação e dependência entre duas grandezas e suas propriedades, com ênfase nas transformações.

##### **Objetivos Específicos:**

Introduzir o conceito de função de segundo grau por meio de uma situação problema.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM que envolvem o conceito de função afim.

Abordar as diversas representações de uma função como a tabela, a lei algébrica e o gráfico.

Apresentar a definição de função polinomial do segundo grau.

Desenvolver o significado das raízes de uma função do segundo grau e apresentar uma forma para cálculo de suas raízes.

Trabalhar com gráficos de uma função de segundo grau mostrando seu comportamento e estudando seus elementos para encontrar sua representação no plano cartesiano.

Abordar três formas de transformação de uma função em outra: reflexão, translação e expansão.

Ao trabalhar com transformações de função, objetiva que o aluno relacione os procedimentos algébricos com os gráficos das funções para facilitar, em alguns casos, a construção do gráfico.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

**Conteúdos:**

Função quadrática, raízes da função quadrática, gráfico, transformações.

**Recursos Didáticos:**

Quadro, giz, lista de exercícios, malha quadriculada.

**Encaminhamento metodológico:****1. Introdução**

Para abordagem de função quadrática, utilizaremos a resolução de problemas conforme abordar Bolzan (2014)

Iniciaremos entregando para alunos a seguinte questão impressa:

Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral. O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R\$ 60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R\$ 2,00 por lugar vago. Sendo  $x$  o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado  $V(x)$ , em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é? Qual será o valor arrecadado se tiver 5 lugares vagos?

Auxiliaremos os alunos na resolução dos exercícios, pedindo que realizem simulação de quanto seria para 1, 2, 3, 4 ou 5 lugares vagos até perceberem o padrão, e após a maioria concluir realizaremos a correção dele. Para a correção seguiremos os seguintes passos:

$x$  pessoas não compareceram para a excursão.

Pagamento pelos lugares ocupados:  $60(15 - x) = 900 - 60x$ . Cada passageiro que compareceu vai pagar mais R\$ 2,00 por lugar vago:  $2x$ .

Total de pagamento pelos lugares vagos:  $2x(15 - x) = 30x - 2x^2$ .

Valor arrecadado  $V(x)$ , em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é:

$$V(x) = 900 - 60x + 30x - 2x^2 = 900 - 30x - 2x^2$$

Pediremos para calcularem o  $V(5)$  mostrando assim que os valores da forma intuitiva são iguais aos valores utilizando a fórmula geral.

Definiremos função quadrática de acordo com Iezzi *et al.* (2013), explicando que a fórmula que encontramos no exercício anterior é uma função quadrática.

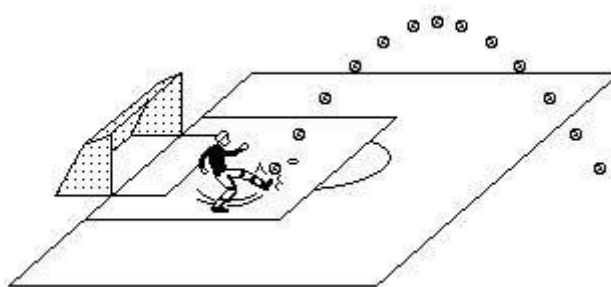
Definição: Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada por uma lei da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , em que  $a, b$  e  $c$  são números reais e  $a \neq 0$ .

## 2. Raízes e vértice da função

Para trabalharmos com raízes da função e vértice da função, utilizaremos o problema abaixo.

1) Um goleiro chuta uma bola que descreve um arco, conforme figura abaixo. Supondo que a altura da bola  $y$ , em metros, seja dada por  $y = -x^2 + 5x$  com  $x$  os segundos após o chute.

**Figura 47: Parábola**



**Fonte:** <http://professor.bio.br/fisica/>

- Depois de quanto tempo a bola está no chão novamente (altura da bola igual a zero)?
- Qual a altura máxima da bola nessa trajetória? E com quantos segundos a bola atinge essa altura máxima?

Incentivaremos os alunos a pensar na simetria da parábola, de modo que o ponto mais alto será metade da distância entre o chute e onde a bola toca o chão, ou seja, será dado pela coordenada do vértice  $x$  aplicado na função, encontrando assim o  $y$  correspondente.

Depois da resolução e correção da atividade, formalizaremos o conceito de vértice da parábola, e raiz da função de acordo com Iezzi *et al.* (2013).

Definição: Pelo eixo de simetria da parábola, sabemos que a abscissa do vértice é dada por  $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$  em que  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ , logo  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ . Com isso,

podemos concluir que a abscissa do vértice é  $x_v = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ . A partir disso, ao substituir  $x_v$  em  $y = ax^2 + bx + c$ , teremos  $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ . Logo, o vértice da parábola é a coordenada  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ .

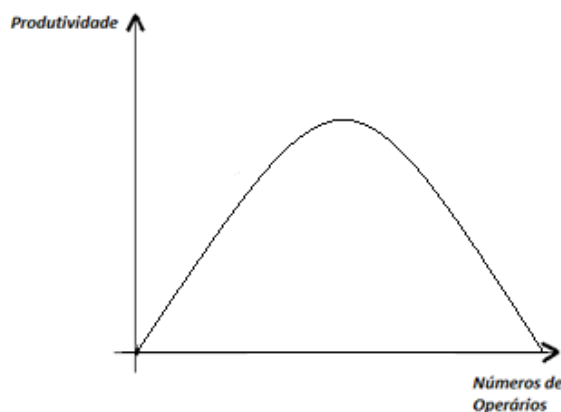
Definição: Chamam-se raízes ou zeros da função polinomial do 2º grau, dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  os números  $x$  tais que  $f(x) = 0$ .

### 3. Gráficos

Primeiramente introduziremos o assunto com uma questão mais intuitiva sobre gráficos, visando mostrar em que tipo de situações podemos ter um gráfico correspondente a função quadrática. Segue abaixo a questão trabalhada:

Descreva o que a figura abaixo mostra a respeito de uma linha de montagem cuja produtividade é representada em função do número de operários que lá trabalham.

**Figura 48: Gráfico correspondente à produtividade de uma linha de montagem**



**Fonte:** Acervo dos autores

Utilizando seis funções e com o apoio da malha quadriculada trabalharemos os elementos para o estudo da parábola, das quais duas funções não possuem raiz, duas possuem apenas uma e as demais possuem as duas. De acordo com o livro *Matemática construção e significado* (Moderna, 2005, p.92) para a construção de um gráfico da função do segundo grau precisamos identificar os seguintes elementos:

- O ponto em que a parábola intercepta o eixo y

Sabemos que para que a função intercepte o eixo  $y$  temos que ter  $x = 0$ , assim concluímos que:

**Definição:** Tendo  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . As coordenadas do ponto em que a parábola intercepta o eixo  $y$  são  $(0, c)$ .

Assim encontraremos o ponto e em seguida juntamente com os alunos, colocaremos o mesmo no plano cartesiano para iniciar a construção do gráfico.

- **Os zeros da função**

Relembrando o conteúdo já abordado na aula, apenas mostraremos como colocar os respectivos pontos no plano cartesiano e mostraremos uma segunda forma de encontrar as mesmas.

- **Soma e Produto**

Dada uma função do tipo  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e sendo  $x_1, x_2$  raízes da função vale afirmar que

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- **O vértice do gráfico da função quadrática**

Comentaremos aqui que a coordenada  $x$  do vértice é o ponto médio das coordenada  $x$  das raízes (se existem). Podemos dizer que o vértice tem coordenadas:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- **Concavidade**

Para analisar se concavidade de uma função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  está voltada para cima ou para baixo podemos analisar o coeficiente  $a$  da seguinte forma:

Se  $a > 0$ , a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Se  $a < 0$ , a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Após o estudo dos gráficos concluiremos juntamente com os alunos as informações contidas no quadro abaixo.

**Quadro 10: Estudo da parábola**

| Coeficiente de $x^2$ e discriminante | $\Delta > 0$                         | $\Delta = 0$                      | $\Delta < 0$                            |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| $a > 0$                              | Concavidade para cima; duas raízes.  | Concavidade para cima; uma raiz.  | Concavidade para cima; não possui raiz. |
| $a < 0$                              | Concavidade para baixo; duas raízes. | Concavidade para baixo; uma raiz. | Concavidade para baixo; não possui raiz |

**Fonte:** Acervo dos autores

Consequentemente falaremos sobre domínio e imagem de uma função quadrática, mostrando assim que dada a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e sendo  $Dm(f)$  seu domínio e  $Im(f)$  sua imagem.

A partir disso, mostraremos seus domínios e imagens nas funções já trabalhadas.

#### 4. Transformação

Neste momento, trabalharemos com transformação da função utilizando como embasamento as definições do livro de Cálculo, volume 1, Stewart (2013, p.34) e análise de gráficos. As transformações que serão abordadas:

- Translação da direção do eixo x;
- Translação da direção do eixo y;
- Reflexão no eixo y;
- Reflexão no eixo x.

Para melhor visualização destas transformações, será utilizado o *Software GeoGebra*.

#### 5. Lista de Exercícios

Na lista de exercícios (Apêndice I) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também serão abordadas questões complementares de ENEM, vestibular e concurso. Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade. Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extras.

### Avaliação:

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes.

Escolheremos uma questão que aborde noções de funções de função quadrática, para ser recolhida para avaliação dos conteúdos abordados em aula. A questão escolhida é do ENEM de 2015 e está no Apêndice II.

### Referências

BOLZAN, Alexandre Gallina. **O ensino de função quadrática através da metodologia de resolução de problemas**. 2014. 140 f. Monografia (Especialização) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul, 2014.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

MODERNA (Org.). **Matemática: Construção e significado**. São Paulo: Moderna, 2005.

STEWART, James. **Cálculo: volume 1**, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

### Apêndice I

|                                                                                                                                                                                     |                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
|  <div> Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste<br/> PROMAT 2019 – 7º Encontro </div> |                  |
| NOME:                                                                                                                                                                               | DATA: 01/06/2019 |

**Deslocamentos Verticais e Horizontais:** Suponha  $c > 0$ . Para obter o gráfico de

$y = f(x) + c$ , desloque o gráfico de  $y = f(x)$  em  $c$  unidades para cima

$y = f(x) - c$ , desloque o gráfico de  $y = f(x)$  em  $c$  unidades para baixo

$y = f(x - c)$ , desloque o gráfico de  $y = f(x)$  em  $c$  unidades para a direita

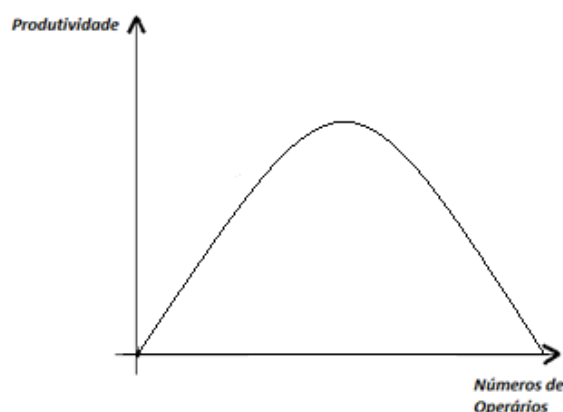
$y = f(x + c)$ , desloque o gráfico de  $y = f(x)$  em  $c$  unidades para a esquerda

**Reflexões:** Suponha  $c > 0$ . Para obter o gráfico de

$y = -f(x)$ , reflita o gráfico de  $y = f(x)$  em torno do eixo  $x$

$y = f(-x)$ , reflita o gráfico de  $y = f(x)$  em torno do eixo  $y$

1) Descreva o que a figura abaixo mostra a respeito de uma linha de montagem cuja produtividade é representada em função do número de operários que lá trabalham.



### Exercícios complementares

2) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número  $f$  de infectados é dado pela função  $f(t) = -2t^2 + 120t$  (em que  $t$  é expresso em dia e  $t = 0$  é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no:

- a) 19º dia
- b) 20º dia
- c) 29º dia
- d) 30º dia
- e) 60º dia.

3) (ENEM 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior

dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão  $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ , em que  $h$  representa as horas do dia.

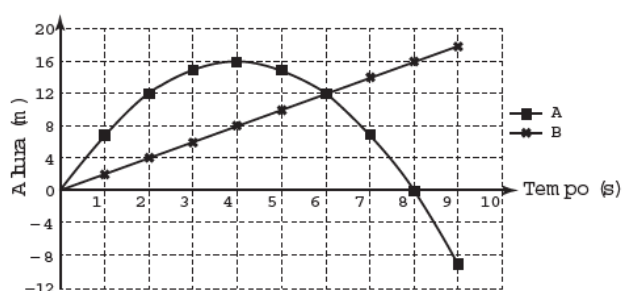
Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

| Intervalos de temperatura (°C) | Classificação |
|--------------------------------|---------------|
| $T < 0$                        | Muito baixa   |
| $0 \leq T \leq 17$             | Baixa         |
| $17 < T < 30$                  | Média         |
| $30 \leq T \leq 43$            | Alta          |
| $T > 43$                       | Muito alta    |

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

- a) muito baixa
- b) baixa
- c) média
- d) alta
- e) muito alta

5) (ENEM 2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta

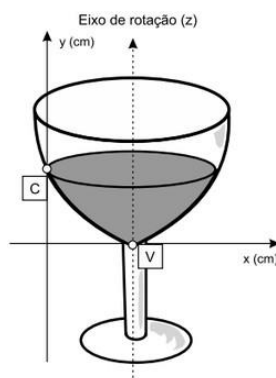
que representa a trajetória de B deverá

- a) diminuir em 2 unidades
- b) diminuir em 4 unidades
- c) aumentar em 2 unidades
- d) aumentar em 4 unidades
- e) aumentar em 8 unidades

6) O Estádio Jornalista Mário Filho, mais conhecido como Maracanã, localizado no Rio de Janeiro é o maior estádio brasileiro com capacidade para 74.738 pessoas, segundo a FIFA. O campo tem medidas oficiais de 110m x 75m com uma área de 186.638m<sup>2</sup>. Um empresário deseja construir em Caçapava do Sul um estádio com o campo possuindo medidas de 90m x 60m. Por segurança pretende cercá-lo deixando um corredor com certa medida entre o campo e a cerca.

- a) Faça um desenho para esboçar essa situação. Escreva a função que representa a área do campo e o corredor juntos e calcule qual deve ser essa área caso largura do corredor seja 5% da largura do campo.
- b) O empresário pretende colocar grama sintética em toda essa área. Quanto ele gastará, sendo que o preço por metro quadrado da grama é 17 reais.

7) (ENEM 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 6x + c, \text{ onde } c \text{ é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros.}$$

Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é?

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5
- e) 6

8) Um restaurante vende 200 kg de comida por dia a R\$ 17,00 o quilo. O consumo médio de um cliente é de 500 gramas de comida. O dono constatou que a cada variação de R\$ 1,00 para mais ou para menos no preço da comida, o restaurante perdia ou ganhava 30 clientes. Supondo que a função que descreve a receita do restaurante é uma função quadrática, obtenha esta função. Qual deve ser o preço do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível? (Lembremos que a receita se dá pelo produto entre a quantidade vendida e o preço).

## Apêndice II

Uma pedra foi lançada verticalmente, para cima, com velocidade inicial de 30 m/s. Se a altura em metros que ela atinge é  $t$  segundos após o lançamento é aproximadamente  $t = 30t - 5t^2$ , pergunta-se:

- a) Em quantos segundos, após o lançamento, ela atinge a altura máxima?
- b) Qual é a altura máxima atingida?

### 2.4.3.1. Relatório

#### Relatório do dia 01/06/2019 (4 horas-aula)

Ao dia um do mês de junho de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-104, nós, estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o sétimo encontro.

Iniciamos a aula utilizando um problema relacionado com vans de turismo, entregamos o problema impresso para cada aluno e realizamos a leitura do problema antes de pedirmos para responderem. A maior dificuldade na resolução da questão foi referente a interpretação do problema e na generalização dos resultados, para tanto tentamos auxiliar na resolução para encontrarem o resultado proposto. Realizamos a correção do problema no quadro, chegando em uma função de segundo grau e definimos a função de segundo grau a partir do problema.

Posteriormente, entregamos a atividade e pedimos para que resolvessem. Depois da leitura, alguns alunos solicitaram ajuda imediatamente, pois não conseguiam entender a questão. Individualmente fomos explicando e sanando dúvidas. Para a resolução do item “a”, alguns alunos imediatamente foram substituindo alguns valores até encontrar os segundos em que a altura fosse 0, outros já notaram que ao substituir  $y$  (altura) por 0, poderíamos encontrar suas raízes pela “Fórmula de *Bhaskara*”, porém alguns al/unos não lembravam qual era a fórmula, por isso, na correção lembramos qual era a fórmula e para que era utilizada. No item “b”, incentivamos os alunos a perceber que a parábola é simétrica, ou seja, o ponto mais alto será a metade da distância entre suas raízes. Notamos que alguns alunos rapidamente notaram a simetria e já conseguiram resolver a atividade. Outros alunos, mesmo com o auxílio ainda não tinham certeza do resultado obtido. Depois da correção, definimos raiz da função, justificando que do mesmo modo que foi realizado com as equações do segundo grau, podemos encontrar suas raízes pela Fórmula resolutiva da equação do segundo grau, também mostramos que para um processo mais rápido, podemos utilizar o vértice da função para encontrar o ponto de

máximo ou de mínimo, para isso, demonstramos no quadro a obtenção das coordenadas do vértice.

Em outro momento da aula, iniciamos o estudo de gráficos, primeiramente trabalhamos com uma questão ao qual o objetivo era ver em que tipo de situações um gráfico de parábola poderia estar inserido. No início foi notado grandes dúvidas em relação à questão, mas no decorrer do diálogo os alunos conseguiram ver a situação, alguns até questionaram por que o gráfico não era o de uma função afim.

Logo após trabalhamos a construção de gráficos da função quadrática com os alunos para assim observar suas variações e qual o motivo delas. Foi notado grande dificuldade por parte dos alunos para entender a construção e o desenvolvimento dela, onde as dificuldades se concentravam mais ao entendimento de igualar a variável  $x$  ou  $y$  a zero para encontrar as interseções. Também, foi notado dificuldade ao entender o conceito de vértice para ela.

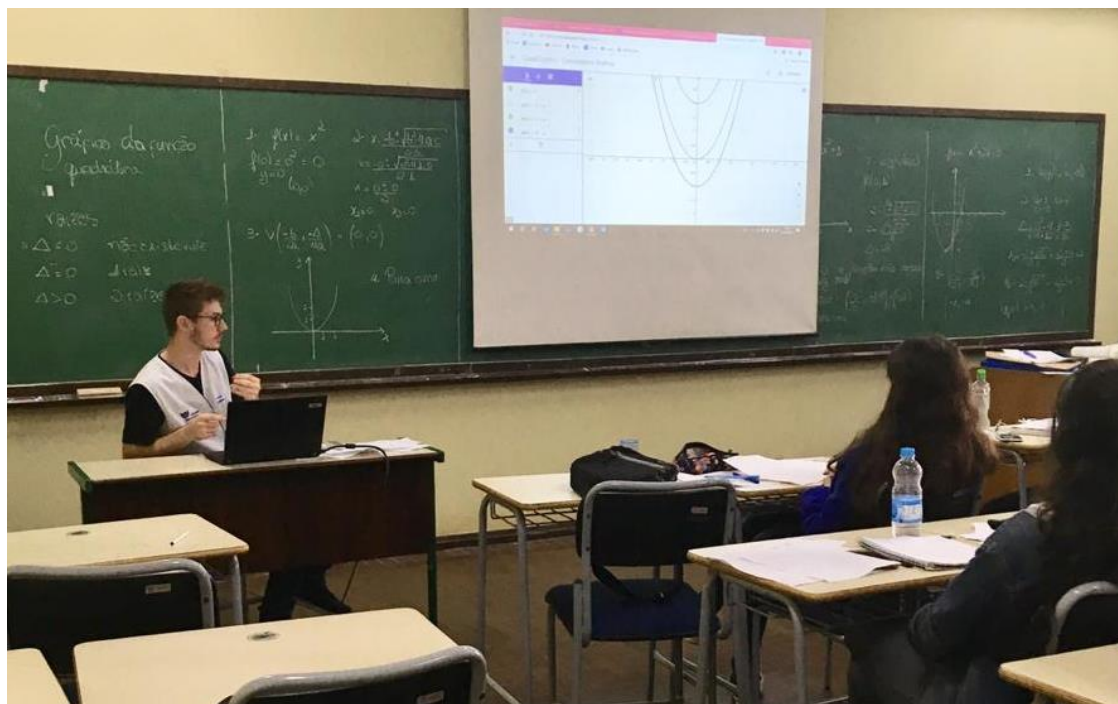
No decorrer da aula uma aluna utilizou a mesma forma de fixação falada ao explicar concavidade para entender que havia se equivocado em uma parte quando estava escrevendo a função correspondente ao do *GeoGebra* no assunto transformação. Tal frase foi a seguinte: “Não tem o sinal negativo porque o gráfico não está triste”.

Além disso, trabalhamos com transformações, inicialmente, perguntamos aos alunos se era possível obter o gráfico de uma determinada função do segundo grau sem utilizar a forma tabular, isto é, construção por pontos, os alunos não responderam, então argumentamos que é possível construir o gráfico de uma função a partir do gráfico de outra função conhecida.

Diante disso, trabalhamos com a translação na direção do eixo  $y$  e  $x$ , sempre utilizando como função original a  $f(x) = x^2$ , e a partir dela fazíamos as transformações. Utilizamos, para isso, o *GeoGebra*, conforme foram dados os exemplos, os alunos foram capazes de prever o que aconteceria com determinada situação. Mostramos para os alunos que ao multiplicar a função por  $-1$  o gráfico refletia sobre o eixo  $x$ , e por esse motivo quando o coeficiente  $a$  de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é negativo a parábola fica com a concavidade voltada para baixo.

Após introduzir as translações e reflexão passamos dois novos gráficos para que os alunos encontrassem a lei de formação da função que gera o gráfico. Com isso, pedimos se algum aluno se dispunha a ir até o quadro para explicar aos seus colegas, então duas alunas explicaram como encontraram as funções. Abaixo segue a imagem do momento desta parte da aula:

**Figura 49: Gráficos GeoGebra**



**Fonte:** Acervo dos autores

Após terminar com as transformações, o tempo ficou para que os alunos resolvessem a lista de exercícios e a tarefa avaliativa. Durante a resolução da lista íamos tirando dúvidas que os alunos tinham.

A avaliação diagnóstica foi entregue por 15 alunos do PROMAT aos quais estavam presentes nessa data. Nela foram exigidas a identificação do ponto máximo de uma função quadrática ao qual era necessário mencionar o valor correspondente na imagem e no domínio do mesmo para cada item pedido na questão.

Foram notados alguns equívocos de leitura em um determinado grupo ao qual utilizaram a velocidade  $30\text{m/s}$  como um valor para a altura ( $h$ ), eles não concluíram a atividade. Porém cerca de metade dos alunos entenderam o propósito da tarefa e o resolveram primeiramente encontrando os zeros da função e determinando o valor de  $x$  correspondente ao ponto máximo, nessa etapa todos pertencente a esse grupo optaram por encontrar o ponto médio da reta determinada pelos  $x$  encontrados como os zeros das funções. Alguns, no entanto, utilizaram o valor certo para os segundos e encontraram a altura máxima, porém deixaram como resposta no primeiro item da atividade com  $t=6$ , sendo que 6 segundos correspondem a um dos momentos em que a bola possui altura igual a zero. Acredita-se que um pensamento possível pelos alunos ao concluir esse resultado é devido ao valor 6 ser o maior entre os valores

encontrados para o tempo durante o processo da resolução, uma vez que foram encontrados  $t=0$ ,  $t=3$  e  $t=6$ .

Foi observado também em algumas resoluções a falha ao determinar os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  da função ao utilizar a “Fórmula de *Bhaskara*” uma vez que a função se apresentou no problema como  $h = 30t - 5t^2$  e falta de atenção na hora de substituir os valores na fórmula.

Concluimos então que de forma geral o conteúdo de função quadrática é visto pelos alunos de maneira a causar receios. É perceptível o entendimento de todos os alunos em vários conceitos apresentados em sala de aula, porém também é visto a defasagem em pelo menos um ponto em específico do conteúdo apresentado.

## **2.5. Módulo 3 – Decomposição dos Sólidos, Polígonos, Ângulos, Relações Métricas, Círculo, Circunferência, Paralelepípedo e Cilindro**

### **2.5.1. Plano de aula do dia 08/06/2019**

#### **PROMAT – 8º ENCONTRO 08/06/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencente ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Conhecer os sólidos geométricos e suas planificações.

Compreender o conceito de área e a sua relação como conceito de perímetro.

Conhecer a nomenclatura dos entes geométricos primitivos e suas propriedades.

##### **Objetivos Específicos:**

Ao se trabalhar com polígonos e suas classificações objetiva-se que os alunos sejam capazes de reconhecer e classificar os diferentes tipos de polígonos quanto ao número de lados quanto aos seus ângulos.

Ao se trabalhar com diagonais de um polígono objetiva-se definir seu conceito e deduzir a fórmula para determinar sua quantidade de diagonais em função ao número de lados.

Ao se trabalhar com área e perímetro, objetiva-se que os alunos consigam obter áreas a partir de áreas conhecidas.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

##### **Conteúdos:**

Decomposição de sólidos, propriedades, classificação, área e perímetro de polígonos.

### **Recursos Didáticos:**

Quadro, giz, lista de exercícios, projetor, cartolina, sólidos geométricos.

### **Encaminhamento metodológico:**

#### **1. Decomposição de sólidos**

Iniciaremos a aula mostrando o Laboratório de Ensino de Matemática, explicando por que o utilizamos, os materiais que são disponíveis para uso no laboratório e disposição da sala em grupos.

Em seguida, mostraremos os sólidos em acrílico e nomearemos os sólidos de forma breve, entregaremos em grupos de no máximo cinco alunos um sólido e uma cartolina, pediremos para planificarem o sólido dado seguindo com rigor as dimensões.

Após concluírem as planificações pediremos que mostrem para os demais grupos a atividade, mostraremos com o *Software GeoGebra* a planificação de cada um dos sólidos para compararem com a atividade que realizaram.

Questionaremos o que observaram ao realizarem as planificações, explicaremos que os sólidos geométricos são constituídos por polígonos e definiremos polígono.

Definição: A região do plano limitada por segmentos de reta e pela sua parte interna é denominada polígonos (BONJORNIO, BONJORNIO e OLIVEIRA, 2006, p.215).

Explicaremos que na geometria euclidiana há conceitos primitivos, postulados e definições importantes, com base em Ribeiro (2012) apresentaremos estes conceitos para os alunos utilizando *Slides*.

Conceitos primitivos: ponto, reta e plano.

Ponto: letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Reta: letras minúsculas do nosso alfabeto.

Plano: letras minúsculas do alfabeto grego.

Relação entre pontos: Se existir uma reta que passe por três pontos eles são colineares, caso contrário eles são não colineares.

Postulados:

1-Retas e planos são conjuntos de pontos;

2-Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos;

3-Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos;

4-Dois pontos distintos A e B determinam uma única reta r a qual eles pertencem;

5-Três pontos não colineares, A, B e C determinam um único plano  $\alpha$  a qual eles pertencem;

6-Se a reta r tem dois de seus pontos, A e B, em um plano  $\alpha$ , ela está contida nesse plano.

Posições relativas entre duas retas:

1-Coincidentes.

2-Distintas Coplanares: Paralelas e Concorrentes (Perpendiculares e oblíquas).

3-Distintas Reversas: Ortogonais e Oblíquas.

Posições relativas entre uma reta e um plano:

1-Reta contida no plano

2-Reta paralela ao plano

3-Reta concorrente ao plano: Reta perpendicular ao plano e Reta oblíqua ao plano

Posições relativas entre dois planos:

1-Distintos: Paralelos e Concorrentes (Perpendiculares e Oblíquos)

2-Coincidentes

## 2. Polígonos e suas classificações

A partir da definição de polígonos, trabalharemos com os diferentes tipos de polígonos, classificando como convexos, não convexos, regular, não regular e a partir disso utilizar slides com exemplos. Definiremos alguns conceitos de acordo com Bonjorno, Bonjorno e Oliveira (2006, p.216-218).

Definição: Um polígono é convexo quando qualquer segmento que une dois de seus pontos está integralmente contido nele.

Definição: Um polígono é não-convexo ou côncavo quando houver qualquer segmento com extremidades nele, mas com pelo menos um ponto fora dele.

Definição: O polígono regular tem lados com a mesma medida e ângulos com a mesma medida.

Definição: O polígono irregular tem pelo menos um dos lados ou um dos ângulos com medida

Também relacionaremos o número de lados dos polígonos com os ângulos externos, mostrando que polígonos regulares possuem ângulos internos iguais e polígonos irregulares possuem ângulos diferentes.

Depois de explicitarmos a regularidade entre os polígonos, iniciaremos a próxima atividade.

### 3. Número de diagonais dos polígonos

Iniciaremos definindo diagonais, e em seguida pediremos que os alunos completem o quadro abaixo. A partir dele iremos encaminhar a dedução da fórmula do número de diagonais de polígonos regulares.

**Quadro 11: Número de diagonais**

| Número de lados | Número de diagonais por vértice | Número total de diagonais |
|-----------------|---------------------------------|---------------------------|
| 3               |                                 |                           |
| 4               |                                 |                           |
| 5               |                                 |                           |
| 6               |                                 |                           |
| 20              |                                 |                           |
| 30              |                                 |                           |
| 50              |                                 |                           |

**Fonte:** Acervo dos autores

Também entregaremos uma folha com os polígonos para auxílio, de modo que proporcione melhor visualização, podendo desenhar as diagonais.

Depois do preenchimento da tabela, generalizaremos a maneira de encontrar o número de diagonais para um polígono com  $n$  vértices.

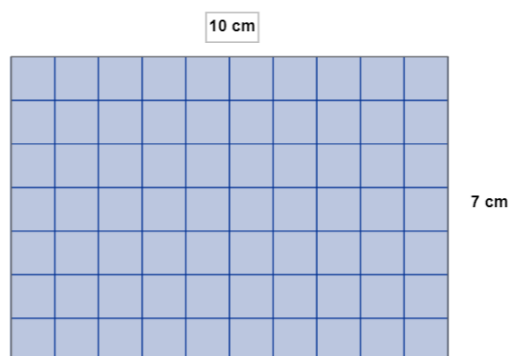
$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

### 4. Área e perímetro

Para trabalhar com o conceito de área, utilizaremos o *Software GeoGebra* para que os alunos compreendam o processo de dedução das fórmulas de área de alguns polígonos.

- Retângulo

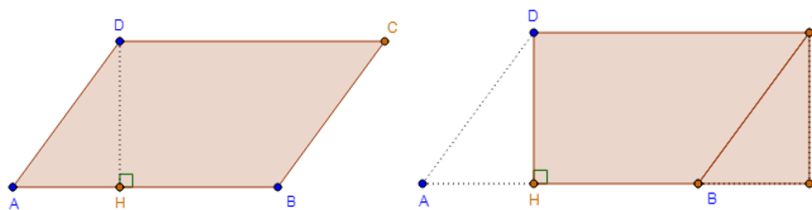
Para este polígono vamos obter a área através da divisão do retângulo em quadrados de lado 1 cm.

**Figura 50: Área do quadrado**

**Fonte:** Acervo dos autores

- Paralelogramo

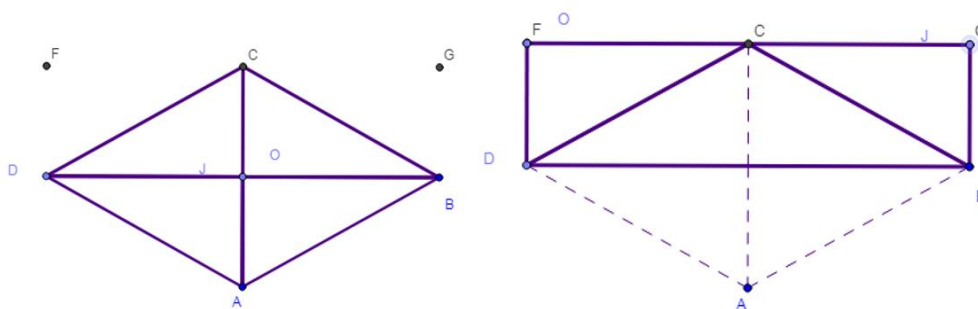
Vamos obter a área do paralelogramo a partir da área do retângulo, isto é, a decomposição do paralelogramo em retângulo.

**Figura 51: Decomposição do paralelogramo em retângulo**

**Fonte:** Acervo dos autores

- Losango

Vamos decompor o losango em retângulo, e assim obter sua área.

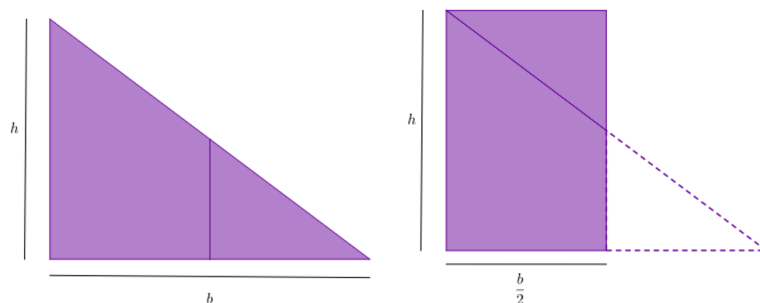
**Figura 52: Decomposição do losango em retângulo**

**Fonte:** Acervo dos autores

- Triângulo

Para obter a área do triângulo, iremos decompô-lo em um retângulo.

**Figura 53: Decomposição do triângulo em retângulo**

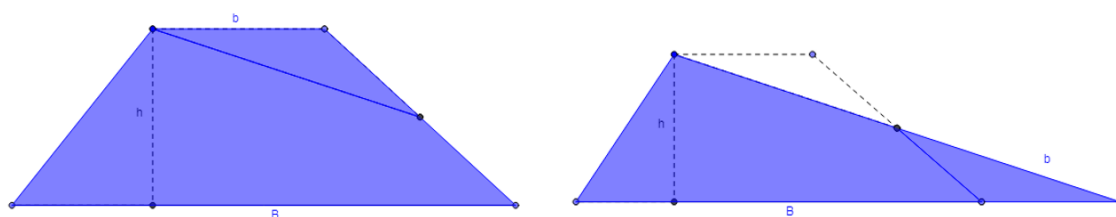


**Fonte:** Acervo dos autores

- Trapézio

Neste caso, vamos decompor o trapézio em um triângulo.

**Figura 54: Decomposição do trapézio em triângulo**



**Fonte:** Acervo dos autores

Desta maneira, as áreas serão deduzidas a partir de áreas já conhecidas, para que o aluno não precise decorar fórmulas.

Para abordar perímetro, primeiramente vamos introduzir o significado da palavra perímetro, e posteriormente, passaremos a definição matemática para perímetro.

Etimologia: Segundo Houaiss (2009, CD-ROM) perímetro significa originalmente a “linha que forma o contorno”.

Na geometria significa linha que forma o contorno de uma figura traçada num plano ou numa superfície; soma de lados de uma figura” (HOUAISS, 2009, CD-ROM).

## 5. Lista de Exercícios

Na lista de exercícios (Apêndice I) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também será abordado questões complementares de ENEM, vestibular e

concurso. Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade. Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extras.

### Avaliação:

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes, para isso será utilizado um exercício do ENEM de 2008, retirado de UOL (2008). A questão escolhida está no Apêndice II.

### Referências

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVEIRA, Ayrton. **Matemática**: fazendo a diferença. São Paulo: FTD, 2006.

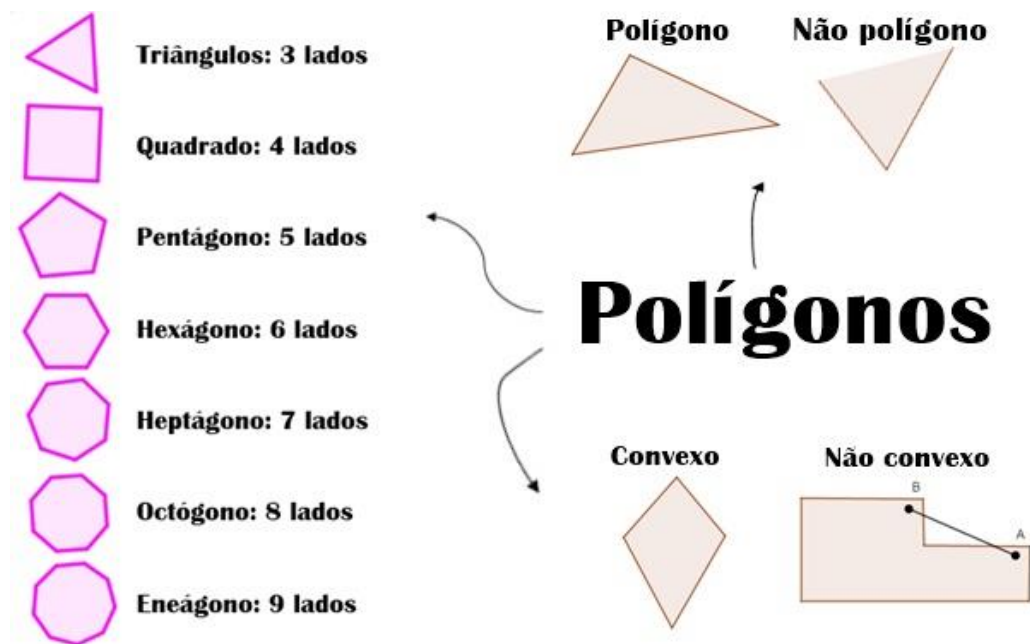
PERÍMETRO. In: HOUAISS, Antônio. **Houaiss Eletrônico**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM

RIBEIRO, Jackson. **Matemática Ciência**, Linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2012.

UOL. **Matemática**. 2008. Disponível em:  
<<https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/enem---geometria-2-questao-utiliza-uma-caracteristica-do-tangram.htm>>. Acesso em: 07 jun. 2019

### Apêndice I

|                                                                                     |                                                                                          |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste PROMAT 2019 –<br/>8º Encontro</b> |  |
| <b>NOME:</b>                                                                        | <b>DATA: 08/06/2019</b>                                                                  |  |



| Número de lados | Número de diagonais por vértice | Número total de diagonais |
|-----------------|---------------------------------|---------------------------|
| 3               |                                 |                           |
| 4               |                                 |                           |
| 5               |                                 |                           |
| 6               |                                 |                           |
| 20              |                                 |                           |
| 30              |                                 |                           |
| 50              |                                 |                           |

### Exercícios complementares

1) (UFSCAR 2000) Um polígono regular com exatamente 35 diagonais tem:

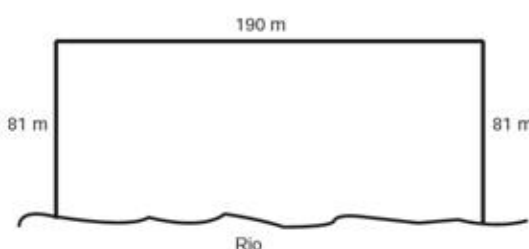
- a) 6 lados
- b) 10 lados
- c) 20 lados
- d) 9 lados
- e) 12 lados

2) (Unesp-2001) O número de diagonais de um polígono convexo de  $x$  lados é dado por

$$N(x) = \frac{(x^2 - 3x)}{2}. \text{ Se o polígono possui 9 diagonais, seu número de lados é}$$

- a) 10
- b) 9
- c) 8
- d) 7
- e) 6

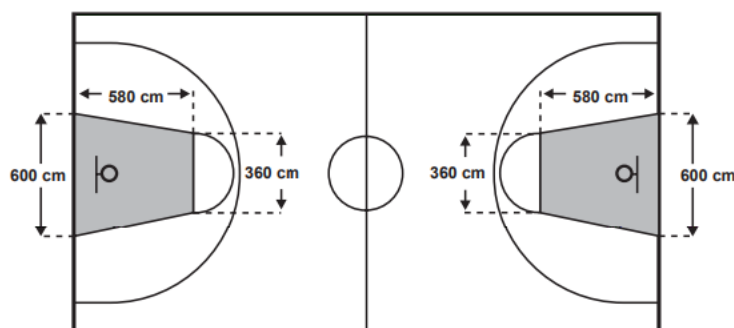
3) (ENEM 2013) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

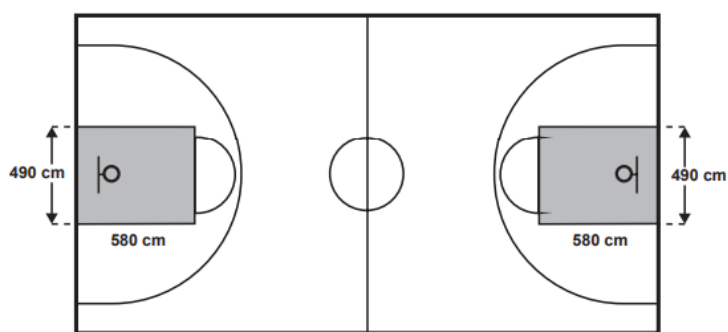
- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 11
- e) 12

4) (ENEM 2015) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

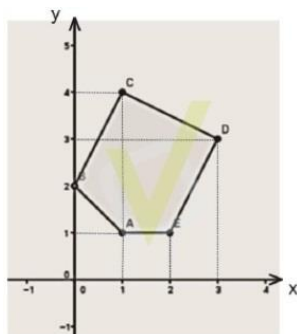


Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

- a) aumento de  $5\,800\text{ cm}^2$ .
- b) aumento de  $75\,400\text{ cm}^2$ .
- c) aumento de  $214\,600\text{ cm}^2$ .
- d) diminuição de  $63\,800\text{ cm}^2$ .
- e) diminuição de  $272\,600\text{ cm}^2$ .

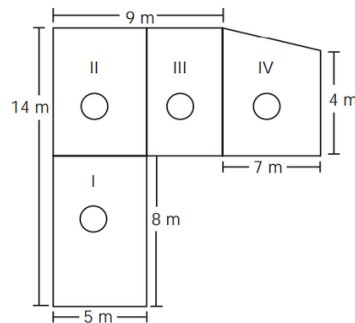
5) (USF 2015) Por meio de uma radiografia, identificou-se um tumor no pulmão de um paciente. Para estimar o tamanho desse tumor, tomou-se um polígono de forma aproximada e calculou-se a área. O polígono está representado no plano cartesiano a seguir.



- a) 4,0 u.a
- b) 5,5 u.a
- c) 7,5 u.a
- d) 9,0 u.a
- e) 11,0 u.a

6) (Adaptado ENEM 2012) Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome  $600\text{ g/h}$  (gramas por hora) de gás propano e cobre 35

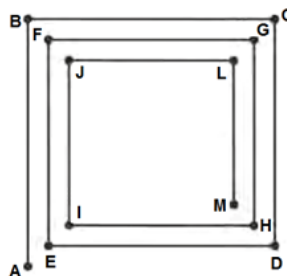
m de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte.



Avaliando-se todas as informações, serão necessários:

- Quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
- Três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
- Duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
- Uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
- Nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

7) Considere que o esquema represente uma trilha poligonal que Carlos deve percorrer, partindo do ponto A até chegar ao ponto M.

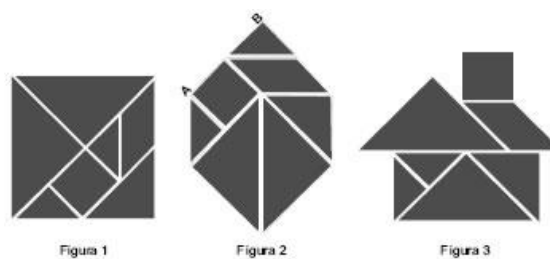


Sabendo que o segmento AB possui 11 m de comprimento e, a partir desse, o comprimento de cada segmento seguinte possui um metro a menos que o comprimento do segmento anterior, quantos metros Carlos terá caminhado ao percorrer toda a trilha?

- 176 m
- 121 m
- 111 m
- 66 m
- 65 m

## Apêndice II

(ENEM 2008) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então qual é a área da figura 3, que representa uma “casinha”?

### 2.5.1.1. Relatório

#### Relatório do dia 08/06/2019 (4 horas-aula)

Ao dia oito do mês de junho de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-108, nós, estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o oitavo encontro.

Iniciamos explicando aos alunos que nesse encontro iríamos conhecer o Laboratório de Ensino de Matemática – LEM. Logo em seguida, nos deslocamos até o laboratório, onde iniciamos as atividades.

Em seguida distribuímos cartolinas e sólidos geométricos para cada grupo instruindo-os a planificar o sólido que receberam.

**Figura 55: Planificação dos sólidos**



**Fonte:** Acervo dos autores

Após terminada a tarefa solicitamos que os alunos escrevessem nas cartolinas, quais os polígonos que formaram a planificação dos sólidos, essa atividade ocorreu rapidamente e

com muita facilidade, não houve dificuldade nem mesmo nas planificações. Depois disso, entregamos a lista de exercícios e começamos a questionar o motivo de uma das figuras estava como “não-polígono”, uma das respostas que obtivemos é porque faltava um segmento para completar a figura, então, a partir disso reforçamos a definição de polígono. Questionamos também, o que é polígono convexo e não-convexo, e mostramos um exemplo no slide. Além disso, mostramos um exemplo de polígono regular e discutimos os aspectos dele, chegando à conclusão de que o polígono regular possui todos os lados e ângulos congruentes, do mesmo modo para o polígono irregular, os alunos concluíram que polígono irregular possuía no mínimo um lado e ângulo não congruente.

Iniciamos a classificação dos polígonos de acordo com o número de lados mostrando três triângulos, com a medida de seus lados. Indagamos sobre a semelhança entre eles, mostrando que o triângulo isósceles possui dois lados congruentes e dois ângulos congruentes, o triângulo equilátero possui todos os lados e ângulos congruentes e o triângulo escaleno possui todos os lados e ângulos não congruentes. Em seguida, mostramos na projeção alguns polígonos regulares e seus respectivos ângulos, classificando conforme o número de lados.

Logo após, entregamos uma folha para cada aluno como apoio para a próxima atividade, ele continha 4 polígonos regulares. Nessa atividade os discentes precisavam preencher uma tabela ao qual pedia o número de diagonais por vértice e o total de diagonais para cada polígono inserido na tabela. Inicialmente notamos o equívoco dos alunos ao contar a mesma diagonal duas vezes devido ao motivo de para definir a quantidade total de diagonais do polígono somar a quantidade encontrada por vértice. No decorrer da atividade foi notado o entendimento dos alunos ao padrão inserido para encontrar as diagonais, tornando mais visível a eles como chegar ao resultado procurado sem dificuldade e assim facilitando a dedução da fórmula que nos mostra o número de diagonais existentes em cada polígono convexo independentemente da quantidade de lados que possui.

Posterior ao intervalo o assunto abordado foi área e perímetro. Para isso, inicialmente perguntamos aos alunos o que é uma área, um dos alunos respondeu que “é um espaço limitado por segmentos”, e outros que “é a parte de dentro de uma figura”, podemos observar que a primeira resposta é mais matemática, enquanto a segunda é intuitiva. Diante disso, utilizamos o *GeoGebra* para que os alunos pudessem entender que de maneira intuitiva a área é o preenchimento interno de uma figura, neste caso utilizamos o retângulo, e com isso os alunos logo perceberam que a quantidade de quadrados de lado 1 equivalia a multiplicação da base pela altura.

Nesse sentido, conforme o plano de aula, deduzimos as áreas de algumas figuras a partir da área de figuras conhecidas, isto é, o paralelogramo, losango e triângulo foram obtidos a partir do retângulo, enquanto o trapézio foi obtido por meio do triângulo. Conforme íamos trabalhando os assuntos, os alunos nos auxiliavam nas construções. Quando estávamos deduzindo a área do triângulo, o professor supervisor que acompanhava nossa turma neste momento, perguntou o motivo da expressão  $\frac{b \cdot h}{2}$  valer para qualquer triângulo, com isso utilizamos um triângulo escaleno, e fizemos a decomposição dele em um paralelogramo, como a área do paralelogramo é igual ao do retângulo, temos que a área do triângulo também pode ser obtida pela expressão apresentada acima. Além disso, ao trabalhar com a noção de perímetro perguntamos aos alunos o que é perímetro, alguns responderam que “é a soma de todos os lados”, a partir disso passamos a etimologia da palavra perímetro segundo o dicionário Houaiss, e posteriormente a sua definição na geometria.

No final da aula, deixamos que os alunos resolvessem os exercícios complementares e tirassem dúvidas. Alguns exercícios foram comentados e outros resolvidos no quadro pelos próprios alunos.

Além disso, nos minutos restantes da aula passamos a tarefa avaliativa para os alunos, 18 alunos nos entregaram esta tarefa que tinha por objetivo observar se os alunos relacionavam a área das figuras, de maneira a facilitar o cálculo para obter a área da “casinha”, que neste caso é a área do quadrado e do hexágono. Dos 18 alunos, 11 obtiveram como resposta 8 cm<sup>2</sup>, dos quais apenas 3 utilizaram o teorema de Pitágoras para obter o valor da hipotenusa do maior triângulo retângulos, e assim encontraram a área da figura 1, que por consequência é igual a área da figura

3. Ainda dos 12 alunos, 8 encontraram a área através de  $\frac{4 \times 4}{2}$  que resultou em 8, um dos

alunos escreveu  $A = \frac{D \times d}{2}$  onde podemos inferir que esta expressão calcula a área de um

losango, então os alunos podem ter visto o hexágono como um losango. Dos 18, 6 concluíram que a área da “casinha” é 9 cm<sup>2</sup>, dois desses encontraram o lado do quadrado da figura 1 como sendo 3 cm, então a área é 9 cm<sup>2</sup>, e 4 dos 6 calcularam a área para cada peça da “casinha” efetuando a adição e obtendo 9 cm<sup>2</sup>. E dos 18 alunos, 1 deles apenas colocou como resposta 16 cm<sup>2</sup>.

### **2.5.2. Plano de aula do dia 15/06/2019**

#### **PROMAT – 9º ENCONTRO 15/06/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Apresentar entes primitivos e definições da Geometria Plana. Reconhecer se dois triângulos são semelhantes. Conhecer o Teorema de Pitágoras a partir de uma justificativa geométrica e como consequência das relações métricas no triângulo retângulo.

##### **Objetivos Específicos:**

Ao se trabalhar com ângulos, objetiva-se que os alunos sejam capazes de compreender os conceitos e classificações de ângulos.

Ao se trabalhar com relações métricas, objetiva-se que os alunos sejam capazes de identificar situações que se fazem necessário usá-las.

Trabalhar com os casos de semelhança de triângulos para que os alunos identifiquem quando são triângulos semelhantes.

Ao se trabalhar com Teorema de Pitágoras, objetiva-se que os alunos sejam capazes de compreendê-lo geometricamente.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

##### **Conteúdos:**

Ângulos, Teorema de Tales, semelhança de triângulos, relações métricas, Teorema de Pitágoras.

##### **Recursos Didáticos:**

Quadro, giz, lista de exercícios., material didático em cartolina, projetor.

### Encaminhamento metodológico:

#### 1. Ângulos

Definiremos alguns conceitos a partir de Júnior e Castrucci (2009)

Definição: Ângulo é toda a região convexa do plano determinada por duas semirretas de mesma origem

Definição: Dois ângulos que têm a mesma medida são chamados ângulos congruentes.

Definição: Dois ângulos que possuem o mesmo vértice e têm um lado em comum são denominados ângulos consecutivos.

Definição: Dois ângulos que não possuem pontos internos comuns são denominados ângulos adjacentes.

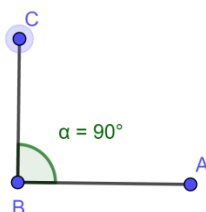
Definição: Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é igual a  $90^\circ$ .

Definição: Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é igual a  $180^\circ$ .

Definiremos a classificação dos ângulos quanto às suas medidas de acordo com Bonjorno (2006).

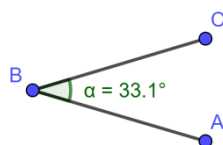
Definição: O ângulo cuja medida é igual a  $90^\circ$  é denominado ângulo reto.

**Figura 56: Ângulo reto**

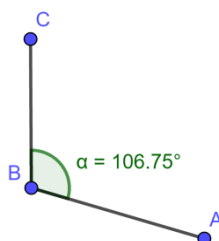


**Fonte:** Acervo dos autores

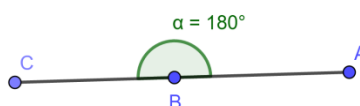
Definição: O ângulo cuja medida é menor que  $90^\circ$  é chamado ângulo agudo.

**Figura 57: Ângulo agudo****Fonte:** Acervo dos autores

Definição: O ângulo cuja medida é maior que  $90^\circ$  e menor que  $180^\circ$  é chamado ângulo obtuso.

**Figura 58: Ângulo obtuso****Fonte:** Acervo dos autores

Definição: O ângulo cuja medida é igual a  $180^\circ$  é denominado ângulo raso.

**Figura 59: Ângulo raso****Fonte:** Acervo dos autores

## 2. Semelhança de triângulos

Para abordar semelhança de triângulos primeiramente utilizando o projetor vamos mostrar aos alunos uma noção de semelhança, trabalhando assim com uma foto, donde para que as fotos sejam semelhantes ao modificar seu tamanho não deve mudar sua forma. Em seguida trabalharemos com os alunos uma atividade em grupos.

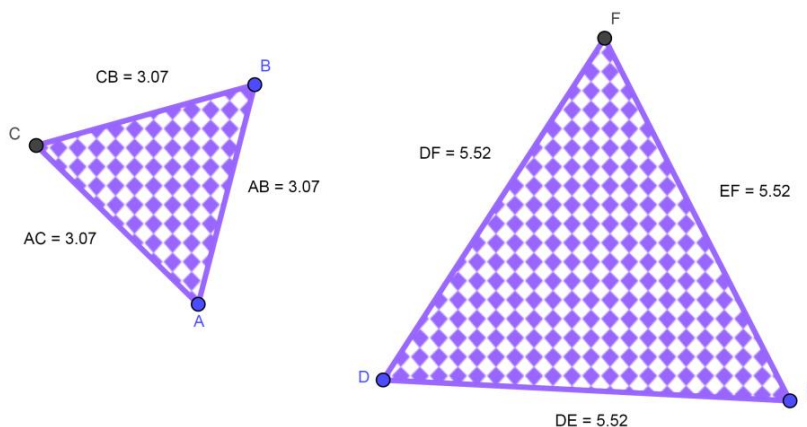
Do livro Moderna (2005, p. 190) temos a seguinte definição:

1º caso: Dois triângulos são semelhantes quando têm os lados correspondentes proporcionais.

2º caso: Dois triângulos são semelhantes quando têm ângulos internos correspondentes congruentes.

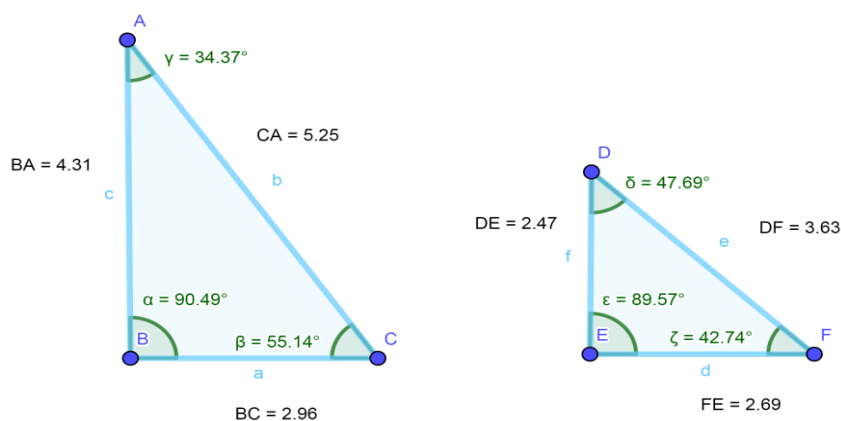
Mostraremos alguns triângulos semelhantes e os casos de semelhança de triângulos com o auxílio do material em *slide* e com material manipulável para visualização dos casos de semelhança.

**Figura 60: Caso semelhança de triângulos**



**Fonte:** Acervo dos autores

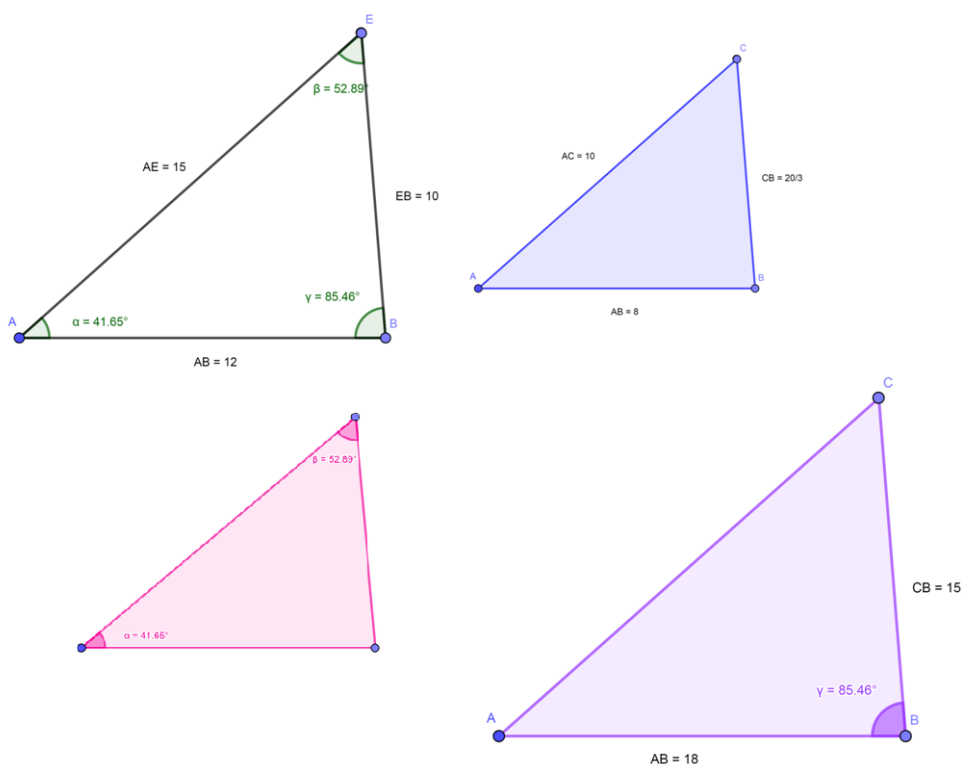
**Figura 61: Caso de não semelhança de triângulos**



**Fonte:** Acervo dos autores

- CASO (LLL) – (Lado – Lado – Lado): Se dois triângulos possuem os lados correspondentes proporcionais então eles são semelhantes.
- CASO (AA) – (Ângulo – Ângulo): Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.
- CASO (LAL) – (Lado – Ângulo – Lado): Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e se os ângulos compreendidos entre esses dois lados forem congruentes então os triângulos são semelhantes.

**Figura 62: Material semelhança de triângulos**

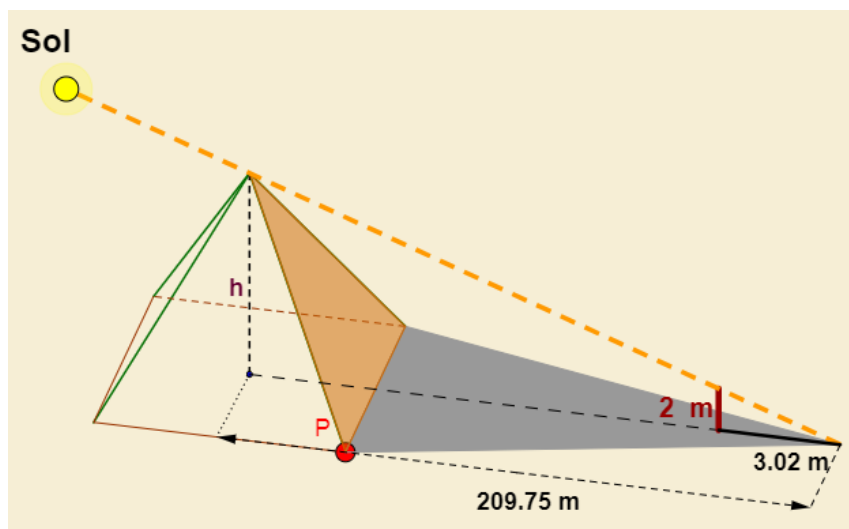


**Fonte:** Acervo dos autores

### 3. Teorema de Tales

Iniciaremos explicando um pouco sobre a história de Tales (624 a.C. - 556 a.C.), nascido em Mileto, que de acordo com Reis (2014) dedicou a parte final de sua vida para o estudo, aprimorando assim o campo da geometria, uma de suas trajetórias foi para o Egito, na qual, foi desafiado a encontrar a altura da Pirâmide de Quéops. Iniciaremos a atividade com o auxílio do *Software Geogebra*, conforme figura abaixo. Assim mostraremos o modo com que Tales encontrou a altura da pirâmide a partir da semelhança de triângulos.

Figura 63: Altura da pirâmide



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/d8S59s8k#material/wVppk956>

Depois pediremos aos alunos que tentem encontrar a altura da pirâmide do mesmo modo que Tales, através da seguinte proporção  $\frac{h}{2} = \frac{209,75}{3,02}$ .

Em seguida enunciaremos o Teorema de Tales, de acordo com Iezzi et al. (2013).

Teorema: Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os segmentos correspondentes da outra.

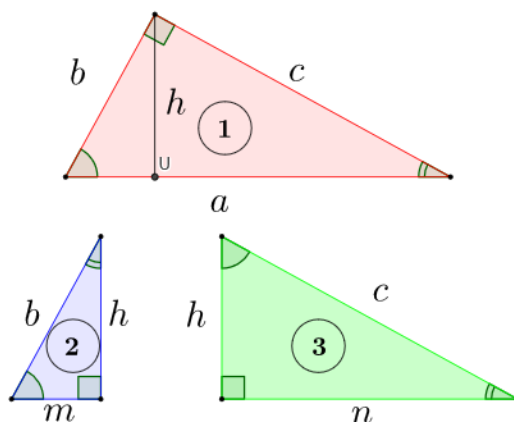
A partir da definição, vamos inserir a atividade abaixo, do ENEM, para ser realizada em sala.

(Adaptado ENEM 1998) A sombra de uma pessoa que tem 1,80m de altura mede 60cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50cm, quanto a sombra da pessoa passou a medir?

#### 4. Relações métricas no Triângulo Retângulo

Utilizaremos o *GeoGebra* para demonstrar as Relações métricas no triângulo retângulo.

**Figura 64: Relações métricas no triângulo retângulo**



**Fonte:** Acervo dos autores

Apresentaremos os triângulos acima e explicaremos que estes triângulos são semelhantes e a partir da semelhança temos as relações métricas.

Semelhança Triângulo 1 e Triângulo 2:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow ah = cb$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an$$

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{n} \Rightarrow cn = bh$$

Semelhança Triângulo 1 e Triângulo 3:

$$\frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow bc = ah$$

$$\frac{b}{h} = \frac{c}{m} \Rightarrow bm = ch$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am$$

Semelhança Triângulo 2 e Triângulo 3:

$$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow h^2 = mn$$

$$\frac{n}{h} = \frac{b}{c} \Rightarrow nc = bh$$

$$\frac{h}{m} = \frac{b}{c} \Rightarrow hc = bm$$

Ressaltaremos que as relações mais utilizadas são as seguintes:

$$ah = cb$$

$$b^2 = an$$

$$c^2 = am$$

$$h^2 = mn$$

$$a = m + n$$

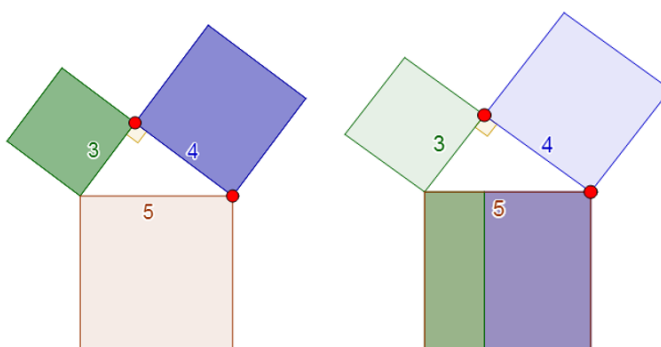
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Entregaremos impresso imagens de triângulos nos quais um dos lados será uma incógnita e utilizando as relações métricas os alunos deverão encontrar o valor dessas incógnitas, conforme apêndice I.

## 5. Teorema de Pitágoras

Neste momento, vamos abordar o Teorema de Pitágoras. Para isso, primeiramente, utilizaremos um material para que os alunos possam manipular e entender melhor o Teorema, posteriormente faremos a interpretação geométrica deste teorema utilizando o *GeoGebra*, isto é, mostrar o teorema como sendo a soma das áreas.

**Figura 65: Mostração do Teorema de Pitágoras utilizando área**



**Fonte:** GeoGebra

Posteriormente, faremos a demonstração do Teorema de Pitágoras através do método euclidiano, que utiliza a semelhança de triângulos, de acordo com Barbosa (1993).

## 6. Lista de Exercícios

Na lista de exercícios (Apêndice II) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também será abordado questões complementares de ENEM, vestibular e concurso. Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade. Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extra.

### **Avaliação:**

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes.

A questão escolhida é do ENEM de 2016 e está no Apêndice III.

### **Referências**

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos padrões pitagóricos: geométricos e numéricos**. São Paulo: Atual, 1993. 93p

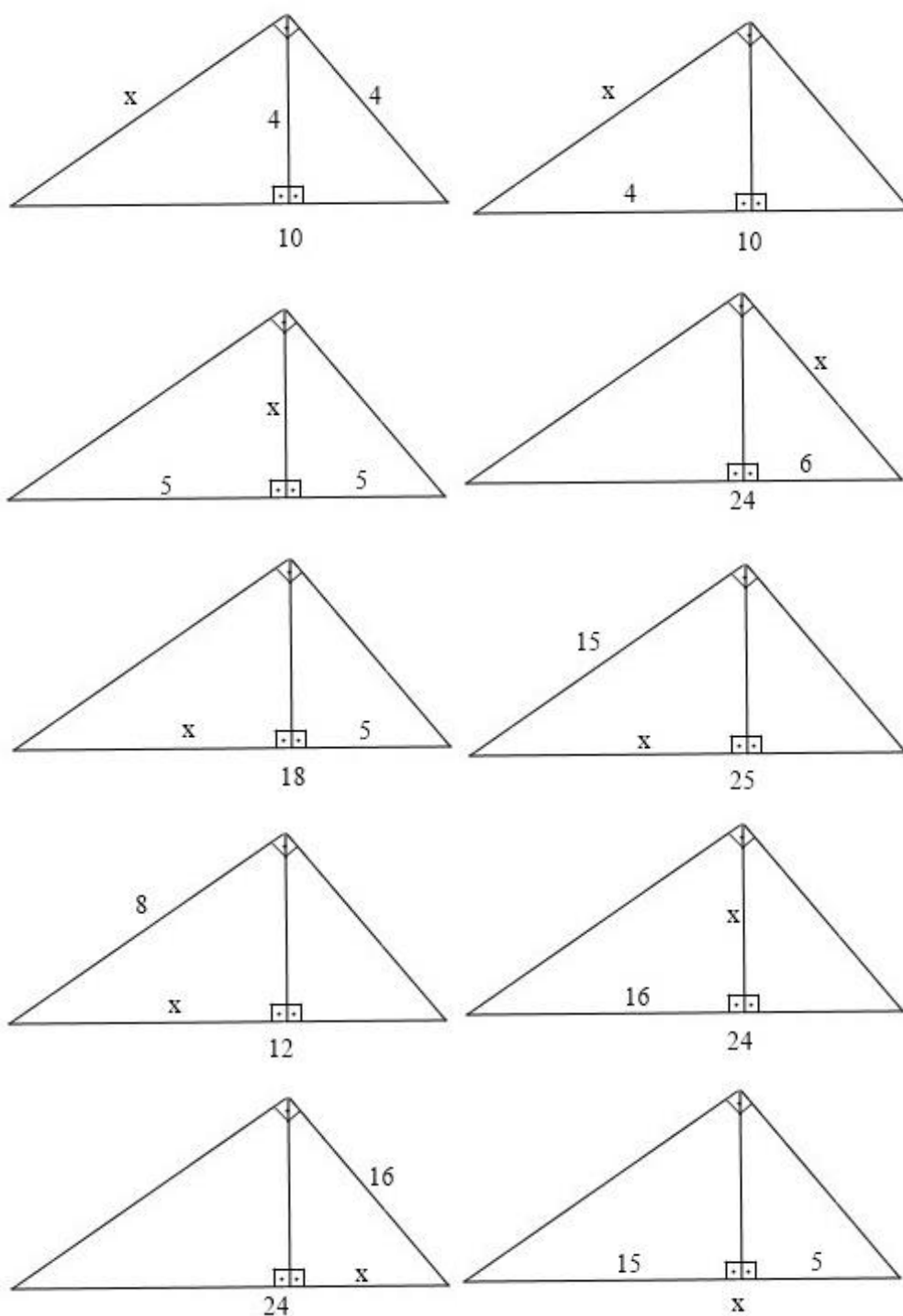
BONJORNO, José Roberto. **Matemática: fazendo a diferença**. São Paulo: Ftd, 2006.

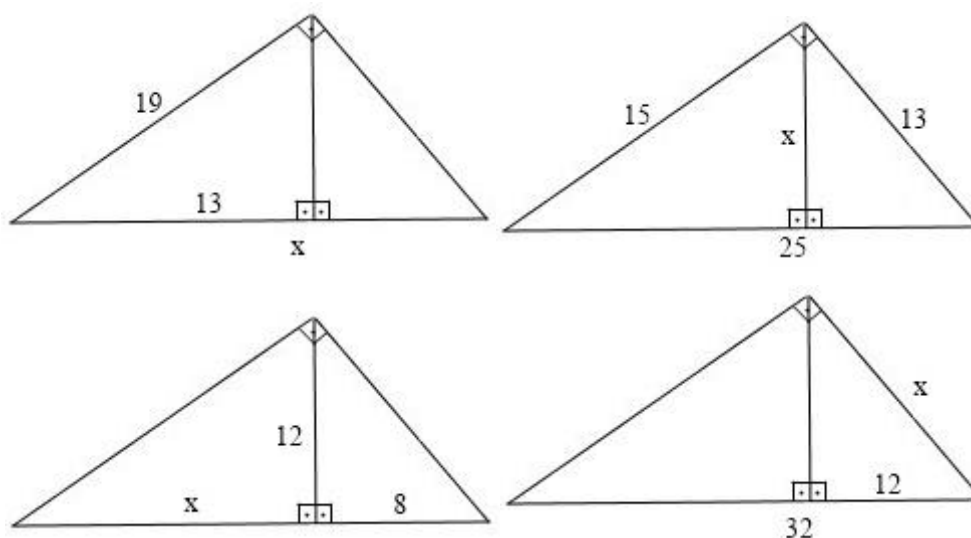
GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

REIS, Paulo Fernando Silva dos. **O teorema de Tales por meio de atividades investigativas**. 2014. 84 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2014.

# Apêndice I





## Apêndice II

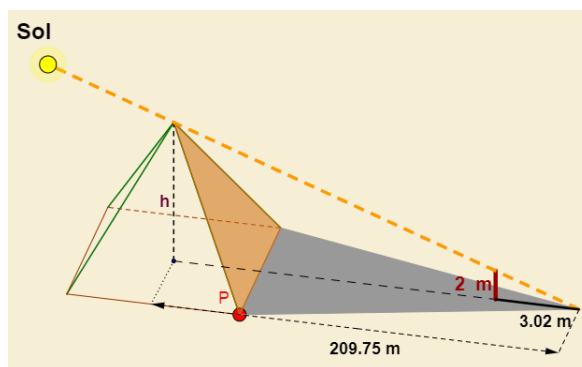
|                                                                                    |                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br><b>PROMAT 2019 – 9º Encontro</b> |
| <b>NOME:</b>                                                                       | <b>DATA: 15/06/2019</b>                                                                        |

1) Relacione a primeira coluna com a segunda e faça uma representação geométrica para cada caso.

- |                                  |                                                                     |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| (1) Ângulo                       | ( ) O ângulo cuja medida é igual a $180^\circ$                      |
| (2) Ângulo agudo                 | ( ) Ângulos que têm a mesma medida                                  |
|                                  | ( ) Ângulos que possuem o mesmo vértice e têm um lado em comum      |
| (3) Ângulo reto                  | ( ) Os lados de um ângulos são os prolongamentos dos lados do outro |
| (4) Ângulo obtuso                | ( ) A soma de dois ângulos é igual a $180^\circ$                    |
| (5) Ângulo raso                  | ( ) O ângulo cuja medida é menor que $90^\circ$                     |
| (6) Ângulos congruentes          | ( ) A soma de dois ângulos é igual a $90^\circ$                     |
| (7) Ângulos consecutivos         | ( ) A soma de dois ângulos é igual a $360^\circ$                    |
| (8) Ângulos adjacentes           | ( ) Região do plano determinada por duas semirretas de mesma origem |
| (9) Ângulos opostos pelo vértice |                                                                     |

- |                             |                                                                         |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| (10) Ângulo completo        | ( ) O ângulo cuja medida é igual a $90^\circ$                           |
| (11) Ângulos suplementares  | ( ) Ângulos que não possuem pontos internos comuns                      |
| (12) Ângulos complementares | ( ) O ângulo cuja medida é maior que $90^\circ$ e menor que $180^\circ$ |
| (13) Ângulos replementares  | ( ) Ângulos com medida igual a $360^\circ$                              |

2) Encontre a altura da pirâmide de Quéops, conforme figura abaixo, utilizando a maneira que Tales realizou para obter essa medida.



3) (ENEM 1998) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50cm, quanto a sombra da pessoa passou a medir?

### Exercícios complementares

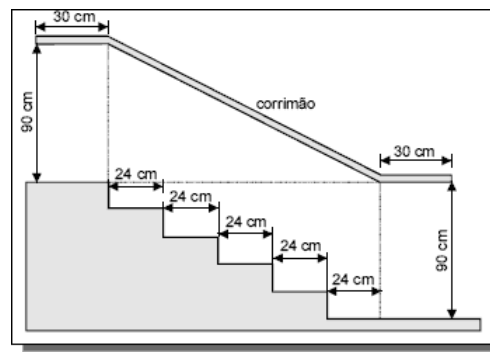
4) (ENEM 2004) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “Mineirinho”, conseguiu realizar a manobra denominada “900”, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito.

A denominação “900” refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

a) uma volta completa b) uma volta e meia c) duas voltas completas d) duas voltas e meia e) cinco voltas completas.

5) (Adaptado ENEM 2006)

A figura ao lado representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:



- a) 2,1m
- b) 1,9 m
- c) 2,2 m
- d) 2,0 m
- e) 1,8 m

6) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

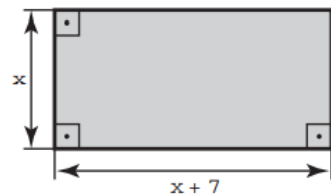


Figura A

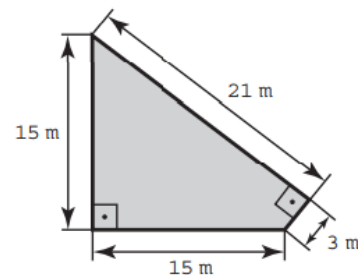
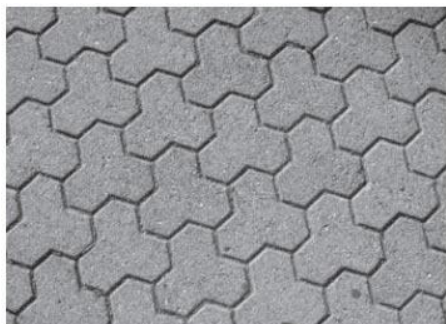


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

- a) 7,5 e 14,5
- b) 9,0 e 16,0
- c) 9,3 e 16,3
- d) 10,0 e 17,0
- e) 13,5 e 20,5

7) (ENEM 2011) O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de:



- a)  $45^\circ$
- b)  $60^\circ$
- c)  $90^\circ$
- d)  $120^\circ$
- e)  $180^\circ$

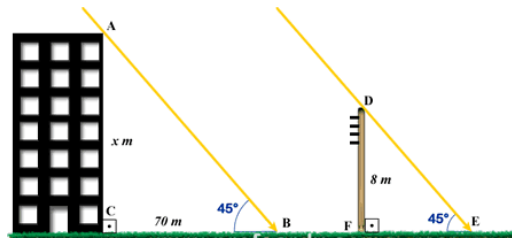
8) (ENEM 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metros.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

- a) 1,16 metros
- b) 3,0 metros
- c) 5,4 metros
- d) 5,6 metros
- e) 7,04 metros

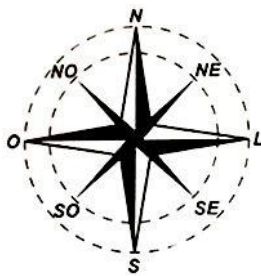
9) Um prédio tem sombra, pela luz solar, projetada no solo horizontal com 70 m.

Simultaneamente um poste de 8m de altura localizado nas proximidades deste prédio também tem sua sombra projetada no solo. Sabendo que neste instante os raios solares fazem um ângulo de  $45^\circ$  com o solo, calcule a altura do prédio e a sombra do poste que, respectivamente, são:



- a) 70 m e 8 m
- b) 35 m e 8 m
- c) 70 m e 4 m
- d) 35 m e 4 m
- e) 20 m e 8 m

10) (ENEM 2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança:  $135^\circ$  no sentido anti-horário;
- 2ª mudança:  $60^\circ$  no sentido horário;
- 3ª mudança:  $45^\circ$  no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

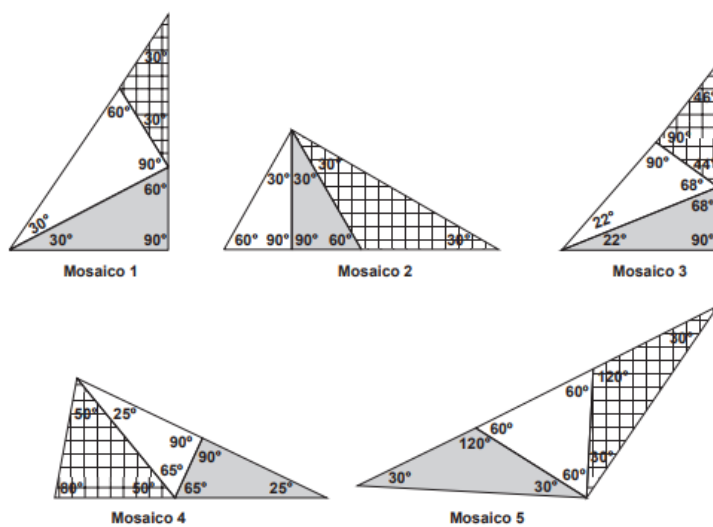
Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

- a)  $75^\circ$  no sentido horário
- b)  $105^\circ$  no sentido anti-horário
- c)  $120^\circ$  no sentido anti-horário
- d)  $135^\circ$  no sentido anti-horário
- e)  $165^\circ$  no sentido horário

### Apêndice III

Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e, a terceira um triângulo

isósceles. Circule a(s) figura(s) que tem as características daquele (mosaico) que se pretende construir. Justifique sua resposta.



### 2.5.2.1. Relatório

#### Relatório do dia 15/06/2019 (4 horas-aula)

Ao dia 15 do mês de junho de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-108, nós, estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o oitavo encontro.

Iniciamos explicando aos alunos que mais uma vez iríamos nos deslocar até o Laboratório de Ensino de Matemática – LEM para começarmos as atividades.

Desencadeamos a aula a partir da primeira atividade da lista de exercícios, a qual pedia para relacionar as colunas de acordo com a definição que estaria na outra coluna. Notamos que os alunos não conseguiram relacionar rapidamente cada caso e solicitaram ajuda, porém ao auxiliá-los, pedíamos para pensarem no significado das palavras como “consecutivos”, “opostos pelo vértice”, e a partir disso alguns alunos conseguiram ter algumas ideias. Para a correção da atividade, utilizamos lâminas com as definições e frisamos as quais houve mais dificuldade, como “ângulos consecutivos”, “ângulos adjacentes” e “ângulos opostos pelo vértice”.

Começamos o assunto semelhança de triângulos falando sobre semelhança com duas imagens questionando os alunos sobre suas possíveis semelhanças e sobre como poderíamos confirmar quando duas imagens são ou não semelhantes. Foi perceptível a interação deles, onde alguns concordavam e outros discordavam com a possibilidade de semelhanças entre os casos inseridos na sala cada um justificando sua opinião para os demais colegas.

Logo após foi introduzido assim o assunto de semelhança em triângulos. Com o material de apoio os alunos começaram a entender o porquê dois triângulos poderiam ser semelhantes e quando seriam congruentes.

**Figura 66: Material de apoio semelhança de triângulos**



**Fonte:** Acervo dos autores

O material de apoio pareceu de grande importância proporcionando aos alunos uma melhor visualização dos três casos inseridos na semelhança.

Abordando esse assunto, ao inserir o caso de semelhança (ALA) surgiu o questionamento de se com somente dois lados proporcionais, sem a necessidade do ângulo congruente seria possível determinar (AA) como um caso de semelhança. Essa questão gerou aos alunos alguns questionamentos aos quais foram respondidos nos momentos seguintes mostrando assim a eles que a abertura do ângulo entre os determinados lados proporcionais interfere na medida do terceiro lado, logo tornando impossível o caso de semelhança. Abordando uma diferente situação, mostramos então dois triângulos congruentes (com seus lados determinados), porém rotacionados de forma diferente, no qual gerou aos alunos certa dúvida sobre sua semelhança. No início foi notado dificuldade nos alunos ao relacionar que dois triângulos são semelhantes se todos os lados dois a dois eram proporcionais, porém, foi esse o caso utilizado pelos alunos (de forma induzida) para perceber que mesmo com rotações diferentes, os triângulos eram semelhantes, enfatizando assim um caso importante de semelhança e também apresentando diferentes situações aos discentes.

Em seguida, trabalhamos os alunos as relações métricas que foram apresentadas através de lâminas para visualizarem quais eram as relações e os casos de semelhança utilizados para obter cada uma delas. Pedimos que anotassem as principais relações e entregamos a folha impressa com os triângulos retângulos para que encontrassem o valor de “x” utilizando as

relações. Esse momento da aula foi bem tranquilo, os alunos conseguiram resolver toda a atividade e foram realizar a correção no quadro, cada aluno teve a oportunidade de resolver a questão uma vez no quadro.

Dedicamos uma parte da aula para abordar uma das relações métricas que, em geral, é mais utilizada, o Teorema de Pitágoras. Para isso, iniciamos perguntando aos alunos o que eles sabiam deste teorema, uma aluna respondeu que é  $a^2 = b^2 + c^2$ , em seguida perguntamos aos alunos o que significa esta expressão, neste momento os alunos ficaram em silêncio. Portanto, utilizando o *GeoGebra* mostramos o teorema a partir das áreas de quadrados de lado correspondentes aos catetos e a hipotenusa, além disso mostramos um vídeo onde é possível observar o teorema através do preenchimento do quadrado da hipotenusa com o líquido dos quadrados dos catetos. Neste momento os alunos ficaram surpresos ao se depararem com uma “aplicação” deste teorema. Disponibilizamos também, um material onde os alunos puderam “manipular o teorema”, onde deviam encaixar as peças dos quadrados dos catetos no quadrado da hipotenusa.

Para que os alunos tivessem uma pequena experiência com demonstração matemática, pedimos para que eles tentassem obter a relação  $b^2 + c^2 = a^2$ , o teorema de Pitágoras, a partir das relações métricas no triângulo retângulo,  $a \cdot h = b \cdot c$ ,  $b^2 = n \cdot a$ ,  $c^2 = a \cdot m$ ,  $a = m + n$  trabalhadas anteriormente.

Sugerimos que iniciassem por “ $b^2 + c^2 =$ ” e completassem a igualdade utilizando qualquer uma das relações métricas. Conforme os alunos resolviam, dávamos dicas para auxiliá-los. Alguns alunos perceberam a relação entre o teorema e as relações métricas e conseguiram chegar até o teorema utilizando essas relações, como foi o caso de uma aluna, de acordo com a imagem que segue.

**Figura 67: Demonstração do teorema de Pitágoras feita por um aluno**

$$\begin{aligned}
 b^2 &= (n+m) \cdot n \\
 c^2 &= (n+m) \cdot m \\
 a^2 &= (m+n)^2 \\
 (m+n)^2 &= ((m+n) \cdot n) + ((m+n) \cdot m) \\
 (m+n)^2 &= mn + mn + n^2 + m^2 \\
 mn + mn + n^2 + m^2 &= mn + mn + n^2 + m^2 \\
 \Delta (m+n)^2 &= ((m+n) \cdot n) + ((m+n) \cdot m) \\
 a^2 &= b^2 + c^2
 \end{aligned}$$

**Fonte:** Produção escrita de aluno

Com isso, concluímos a demonstração juntamente com os alunos.

Posteriormente, deixamos um tempo para que os alunos resolvessem os exercícios da lista que não foram resolvidos durante a aula, enquanto tirávamos suas dúvidas. Por fim, entregamos a tarefa avaliativa para que os alunos resolvessem para que pudéssemos recolher.

O objetivo desta tarefa era observar a maneira que os alunos lidavam com ângulos, triângulos e congruência de triângulos. Dos alunos presentes, 16 entregaram a tarefa avaliativa, apenas um marcou somente o mosaico dois e apenas 2 não apresentaram produção escrita, e 7 alunos chegaram à conclusão de que os mosaicos que apresentam as características descritas é o mosaico um, dois e quatro, a maioria dos alunos que apresentaram este resultado, excluíram os mosaicos três e cinco, porque não contem triângulo isósceles e não forma um triângulo retângulo, respectivamente. Além disso, dos 16 alunos, 4 concluíram que os mosaicos que satisfazem é o um e dois, podemos ver que neste caso os alunos excluíram o mosaico quatro, alguns colocaram a justificativa de que este mosaico não possui triângulo isósceles, podemos inferir que aparentemente, triângulo isósceles ocorre apenas quando os ângulos iguais estão na base. E dos 16, 1 circulo os mosaicos um e três, e 1 aluno circulo apenas o mosaico um. Podemos concluir que, observando as produções, os alunos que marcaram o mosaico um concluíram que os triângulos que tem ângulos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $80^\circ$  são congruentes, mas neste caso, podemos inferir que, não notaram que a medida do cateto de um dos triângulos é igual a medida da hipotenusa do outro, o que por consequência não se tem a congruência dos triângulos uma vez que é necessário que tenham as medidas dos lados iguais.

### **2.5.3. Plano de aula do dia 29/06/2019**

#### **PROMAT – 10º ENCONTRO 29/06/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino pertencentes ao Núcleo Regional de Educação de Cascavel, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste e demais interessados na aprendizagem de Matemática inscritos no projeto.

##### **Tempo de execução:**

Um encontro com duração de 4 horas-aula e um intervalo de 20 minutos. Inicia às 8h00, tendo um intervalo às 9h40 e retornando às 10h00 até as 11h40.

##### **Objetivo Geral:**

Perceber a relação entre a circunferência e o diâmetro. Compreender propriedades do cilindro e paralelepípedo e calcular os volumes e áreas associados a estes sólidos.

##### **Objetivos Específicos:**

Ao se trabalhar com círculo e circunferência, objetiva-se que os alunos sejam capazes de obter as fórmulas que se referem à área do círculo e o comprimento da circunferência através de materiais concretos.

Ao se trabalhar com cubo, objetiva-se que os alunos tenham capacidade de encontrar a área da base, área lateral, área total, diagonal da base, diagonal do cubo e, seu volume.

Ao se trabalhar com paralelepípedo, objetiva-se que os alunos tenham capacidade de visualizar as relações que ele possui com um cubo. Também objetiva-se encontrar a área da base, área lateral, área total, diagonal da base, diagonal do paralelepípedo e volume.

Ao se trabalhar com cilindro, objetiva-se que os alunos obtenham de maneira intuitiva a área lateral e total do cilindro, bem como o seu volume.

Trabalhar com problemas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

##### **Conteúdos:**

Área do círculo e comprimento da circunferência, volume e propriedades do paralelepípedo, o cubo como um caso particular de paralelepípedo e o cálculo do volume do cilindro, bem como o cálculo de sua área.

### Recursos Didáticos:

Quadro, giz, lista de exercícios, material para medição das circunferências, barbante, fita métrica, material manipulável em papel cartão, material manipulável para a área de um círculo, sólidos em acrílico e em madeira, caixas de produtos, software *Geogebra* e data-show.

### Encaminhamento metodológico:

#### 1. Círculo e Circunferência

Para deduzirmos a fórmula do comprimento da circunferência, utilizaremos materiais com formas redondas. Levaremos alguns objetos circulares e pediremos para quem puder trazer para esse encontro. Conduziremos a atividade entregando fita métrica para os alunos, que deverão medir o comprimento da circunferência e o diâmetro. Depois disso, deverão preencher o quadro abaixo, no qual constará o comprimento de cada circunferência, o diâmetro de cada circunferência e a razão entre as medidas encontradas.

**Quadro 12: Comprimento da circunferência**

| Circunferência | Comprimento da circunferência | Diâmetro | Razão: $\frac{c}{d}$ |
|----------------|-------------------------------|----------|----------------------|
| 1              |                               |          |                      |
| 2              |                               |          |                      |
| 3              |                               |          |                      |
| 4              |                               |          |                      |

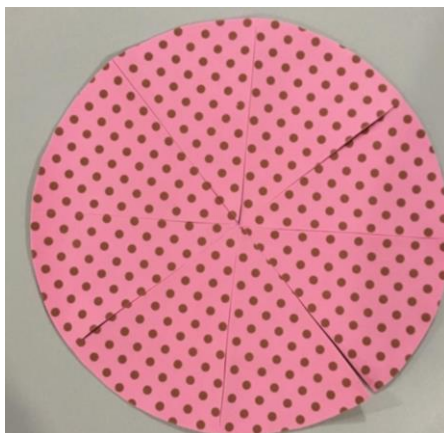
**Fonte:** Acervo dos autores

A razão encontrada deverá ser aproximadamente 3,14. Explicaremos que a variação de valores próximos a 3,14 podem ocorrer pelo fato de que estremos utilizando barbante e que ao esticar mais ou menos ao medir, pode variar o valor encontrado. Assim mostraremos que

$$\frac{c}{d} = \pi, \text{ ou seja } c = \pi \cdot d = \pi \cdot 2r = 2\pi \cdot r.$$

Para deduzirmos a área do círculo, utilizaremos folhas de EVA, cortadas conforme figura abaixo.

**Figura 68: Material área do círculo**



**Fonte:** Acervo dos autores

Entregaremos o material e vamos pedir aos alunos que tentem formar um polígono com área já conhecida. Nosso objetivo é que notem a semelhança com o paralelogramo, e até mesmo com um retângulo, ao particionar mais a figura.

A partir das ideias dos alunos, iremos formalizar o conceito de área de um círculo,  
 $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$ .

## 2. Cubo

Entregaremos para cada grupo um cubo manipulável com as dimensões de 10 cm, produzido com papel cartão e barbante, para que manipulando o objeto possam observar a planificação do cubo.

Utilizando o material e as suas dimensões pediremos para encontrarem os seguintes itens:

1. Área da base.
2. Área lateral.
3. Área total.
4. Volume.
5. Diagonal da face.
6. Diagonal do cubo.

Corrigiremos cada um dos itens acima e generalizaremos os itens acima para um cubo de qualquer dimensão.

## 3. Paralelepípedo

Primeiramente questionaremos os alunos sobre o que eles acham que pode ser um paralelepípedo. Logo após apresentaremos um tipo de paralelepípedo para eles.

Definição: Paralelepípedo é um prisma quadrangular que possui seus lados dois a dois paralelos entre si (MODERNA, 2005, p.457).

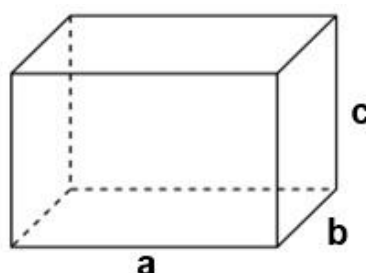
Após, entregaremos caixas de remédios e demais produtos e pediremos para que os grupos formados planifiquem o mesmo e observem suas características comparando as com o cubo.

Algumas questões a serem levantadas podem ser:

1. Qual a diferença entre um cubo e um paralelepípedo?
2. Todo cubo é um paralelepípedo?
3. Todo paralelepípedo é um cubo?

Após levantar esses questionamentos abordaremos as fórmulas para encontrar valores para os seguintes itens definidos de acordo com o livro Matemática construção e significado (MODERNA, 2005, p.461).

**Figura 69: Paralelepípedo**



**Fonte:** Acervo dos autores

Área da base: é a área da face que é a base.

$$A_{\text{base}} = a \cdot b$$

Área lateral: é a soma das áreas das faces laterais.

$$A_{\text{lateral}} = 2ac + 2bc$$

Área total: é a soma da área lateral com as áreas das duas bases.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}}$$

Volume: é a medida da porção do espaço que o paralelepípedo ocupa.

$$V = A_{\text{base}} \cdot c$$

Diagonal da face:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Diagonal do paralelepípedo: é todo segmento cujas extremidades são vértices desse paralelepípedo que não pertencem a uma mesma face.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

#### 4. Cilindro

Neste momento, vamos trabalhar com os conceitos de área e volume de um cilindro. Utilizaremos o *Software GeoGebra* para planificar um cilindro genérico e a partir disto deduzir a área lateral e área total.

De acordo com o livro Fundamentos de Matemática Elementar de Pompeo e Dolce (2013, p.220) a área lateral pode ser calculada pela fórmula  $A_{\text{lateral}} = 2\pi \cdot r \cdot h$ , onde  $r$  é o raio da base e  $h$  é a altura do cilindro. Além disso, a área total pode ser obtida através de  $A_t = 2\pi \cdot r \cdot (h + r)$ .

Para abordar volume, utilizaremos alguns exemplos e posteriormente vamos generalizar para um cilindro qualquer.

#### 5. Lista de Exercícios

Na lista de exercícios (Apêndice I) será abordado conteúdos trabalhados na aula, através de exercícios de operações e de resolução de situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Também será abordado questões complementares de ENEM, vestibular, concurso e do livro Fundamentos de Matemática Elementar (POMPEO, 2013, p.223-224). Durante a resolução, acompanharemos as duplas, de modo a oferecer suporte em caso de necessidade. Após a resolução dos problemas, faremos a correção no quadro de todos os exercícios resolvidos. Alguns serão deixados como questões extras.

#### Avaliação:

A avaliação se pautará nas premissas da avaliação da aprendizagem, com o suporte na análise da produção escrita dos participantes.

A questão escolhida está no Apêndice II, a qual será entregue aos estudantes para resolução e recolhida para que possamos analisar como o estudante a resolveu, que conhecimentos foram mobilizados para a sua resolução.

#### Referências

ENEM – **Cubo e Paralelepípedo**. Disponível em: <[http://www.aulasniap.com.br/static/media/exercicios/cuboeparalelepipedo.pdf](http://www aulasniap.com.br/static/media/exercicios/cuboeparalelepipedo.pdf)>. Acesso em: 26 jun. 2019.

POMPEO, José Nicolau; DOLCE, Oswaldo. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial**. São Paulo: Atual, 2013.

MODERNA (Org.). **Matemática: Construção e significado**. São Paulo: Moderna, 2005.

## Apêndice I

|                                                                                                                                                                                   |                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
|  <b>Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste</b><br><b>PROMAT 2019 – 10º Encontro</b> |                         |
| <b>NOME:</b>                                                                                                                                                                      | <b>DATA: 29/06/2019</b> |

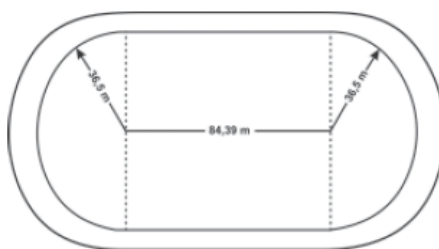
1) Meça as circunferências e exponha os resultados no quadro abaixo.

| Circunferência | Comprimento da circunferência | Diâmetro<br>$d = 2r$ | Razão: $\frac{c}{d}$ |
|----------------|-------------------------------|----------------------|----------------------|
| 1              |                               |                      |                      |
| 2              |                               |                      |                      |
| 3              |                               |                      |                      |

## Exercícios complementares

1) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?



BIEMBENGUT, M. S. Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus. 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

- a) 1
- b) 4
- c) 5
- d) 7
- e) 8

2) (ENEM 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião de condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3m de altura e 2m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar  $81\text{m}^3$  de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para  $\pi$ . Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

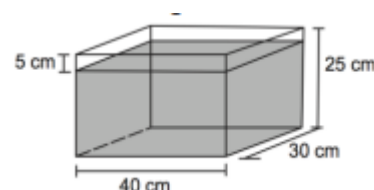
- a) 0,5
- b) 1
- c) 2
- d) 3,5
- e) 8

3) A área lateral de um cilindro de 1m de altura é  $16\text{m}^2$ . Calcule o diâmetro da base do cilindro.

4) Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem 10m de diâmetro e 15m de profundidade?

5) (ENEM 2012) - Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura. O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de  $2.400\text{ cm}^3$ ?

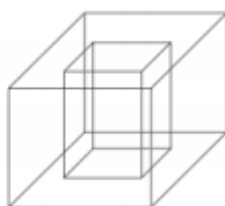
- a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
- b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
- c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
- d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
- e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.



6) (ENEM 2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que tem o formato de cubo é igual a:

- a) 5 cm
- b) 6 cm
- c) 12 cm
- d) 24 cm
- e) 25 cm

7) (ENEM 2010) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

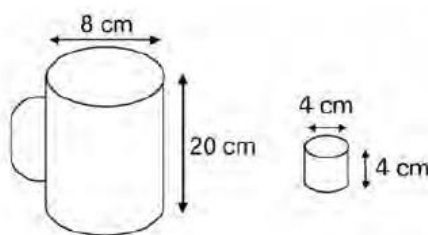
- a)  $12\text{cm}^3$
- b)  $64\text{cm}^3$
- c)  $96\text{cm}^3$
- d)  $1216\text{cm}^3$
- e)  $1728\text{cm}^3$

8) (ENEM 2009) Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de  $13824\text{cm}^3$  então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a:

- a) 4
- b) 8
- c) 16
- d) 24
- e) 32

### Apêndice II

(ENEM 2010) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

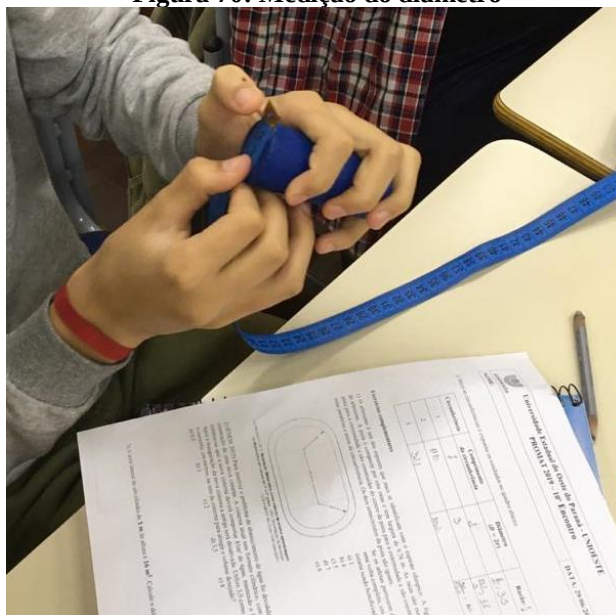
### 2.5.3.1. Relatório

#### Relatório do dia 29/06/2019 (4 horas-aula)

Ao dia 29 do mês de junho de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste, na sala de número A-108, nós, estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática e os alunos inscritos no projeto PROMAT, para desenvolver o décimo encontro.

Inicialmente distribuímos entre as carteiras objetos com base circular, explicando o que significa comprimento e diâmetro de uma circunferência, em seguida solicitamos que os alunos medissem o comprimento e o diâmetro de algumas bases, anotando as medidas encontradas e em seguida fazer a razão entre as grandezas encontradas.

**Figura 70: Medição do diâmetro**



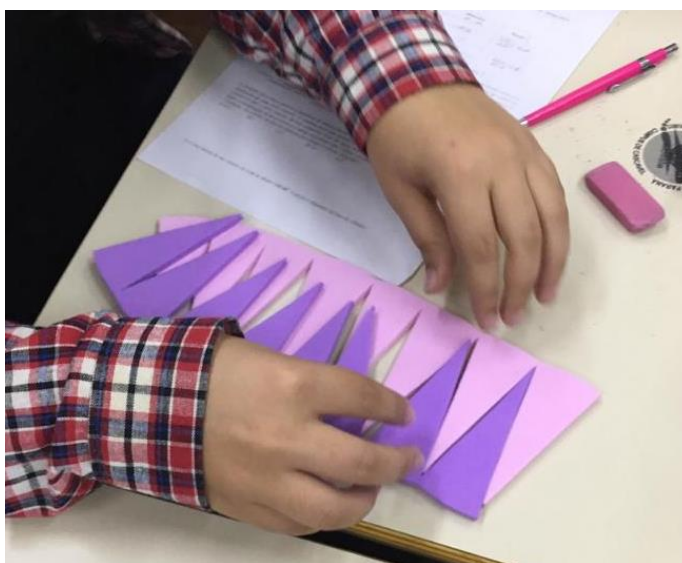
**Fonte:** Acervo dos autores

A partir das primeiras medições, fomos solicitando que os alunos utilizassem as medidas mais precisas possíveis, pois uma grande parte dos alunos estava utilizando o arredondamento, fazendo com que a razão não fosse a desejada, ou seja,  $\pi$ . Ao encontrar a primeira e a segunda razão, alguns alunos já comentaram “o número é três vírgula alguma coisa”, ao serem questionados sobre a precisão das medidas, mediram novamente, encontrando 3,14 em duas razões, porém, foi necessária intervenção, questionando o que representa esse

número encontrado, uma das alunas afirmou “3,14 é  $\pi$ ”. A partir dessa conclusão explicamos que a razão encontrada deve se aproximar de 3,14, pois o diâmetro cabe 3,14 vezes no comprimento, deduzindo assim a fórmula para encontrar o comprimento da circunferência.

Para encontrar a área do círculo, relembramos a maneira que fizemos para deduzir a área de outras figuras a partir da área do retângulo, e a partir disso entregamos o material para que eles pensassem um modo de encontrar a área de um círculo qualquer. Um dos grupos, apenas deixava o material em formato de círculo e utilizaram fita métrica para medir o diâmetro e a circunferência, mas interferimos questionando sobre qual outra figura poderíamos formar com as duas peças que formavam o círculo, os alunos comentaram que cada peça era formada por vários triângulos isósceles. Continuamos indagando sobre o que ocorreria ao sobrepor, quando de repente uma aluna disse que tinha uma ideia, “as peças se completam, mas não sei se é isso”, então pedimos que ela mostrasse sua ideia.

**Figura 71: Montagem do círculo**



**Fonte:** Acervo dos autores

Depois das peças montadas, pedimos qual figura se assemelhava a encontrada, duas respostas vieram rapidamente, retângulo e paralelogramo, em seguida pedimos que pensassem qual seria a base e qual seria a altura. Para que os alunos conseguissem notar, foi necessário montar e desmontar várias vezes o material, para que então chegassem a conclusão de que a altura seria o raio e a base metade da circunferência.

Os outros grupos se encaminharam rapidamente a nova figura, e do mesmo modo que ocorreu com o grupo descrito, encontraram a expressão da área do círculo. Depois disso, explicamos no quadro os passos utilizados para encontrar a fórmula para a área de um círculo.

Em seguida, trabalhamos o Cubo com os alunos, para essa atividade mostramos algumas informações relevantes a partir de lâminas. Nesta atividade utilizamos um material de apoio em que os alunos puderam observar a planificação e o cubo montado, utilizando o material orientamos os alunos a responderem questões relacionadas a área, volume e diagonal. Realizamos a correção da atividade no quadro generalizando os dados obtidos pelos alunos. A maior dificuldade foi em encontrar a diagonal.

Com o tema paralelepípedo sendo consequência do visto anteriormente, observamos uma familiarização maior ao encontrar as medidas pedidas. Foram notados inicialmente algumas dificuldades para entender e encontrar a fórmula geral e determinar seu volume até mesmo em casos específicos. O conteúdo pareceu soar de forma clara para os discentes proporcionando assim um melhor desempenho durante a aula.

Nessa atividade cada aluno recebeu uma caixa para determinar as medidas de seus lados e consequentemente os valores ao qual estávamos trabalhando para descobrir.

Para finalizar o conteúdo foi pedido aos alunos que resolvessem a questão “5” da lista ao qual trabalhava com volume de paralelepípedo. Inicialmente grande parte não soube interpretar o problema, porém após isso feito, os alunos desenvolveram alguns raciocínios bem lógicos e plausíveis. Sua grande maioria não soube chegar a conclusão final por falta de interpretação, porém foi notado grande entendimento durante a resolução da questão no quadro, principalmente nas etapas que não souberam fazer.

Para trabalhar com cilindro iniciamos mostrando um material em forma de cilindro e perguntamos aos alunos que formato tinha aquele material, alguns responderam que é um cilindro, posteriormente pedimos para que os alunos realizassem um esboço da planificação do cilindro, acompanhamos os alunos e todos realizaram o desenho. Após isso, utilizando o *GeoGebra* fizemos a planificação deste sólido e perguntamos a eles o que seria possível calcular utilizando esta planificação, alguns alunos responderam que era possível obter a área do retângulo formado e dos dois círculos, com isso perguntamos o que seria essas três áreas, neste momento os alunos não responderam. Então utilizamos o material em forma de cilindro para mostrar que o retângulo é a área lateral, e diante disso os alunos concluíram que a área do retângulo mais a área dos dois círculos é a área total, logo utilizando a ideia posta por dois alunos de que a base do retângulo é igual a circunferência da base do cilindro, obtivemos duas expressões, uma para calcular a área lateral e outra para a área total. O cálculo do volume do cilindro deu-se juntamente com a ideia de uma aluna de que deveria efetuar a multiplicação da área da base pela altura do cilindro, segundo ela, da mesma maneira que é feito no cubo, nesse sentido encontramos uma expressão para calcular o volume do cilindro.

Ao final da aula, entregamos a tarefa avaliativa para os alunos, que tinha por objetivo observar como calculavam o volume dos cilindros (leiteira e copinho) e relacioná-los com o que era solicitado no enunciado do exercício. 12 alunos entregaram esta tarefa, dos quais 6 alunos calcularam o volume do “copinho”, multiplicaram por 20 e dividiram por 2, obtendo assim como resultando  $502,4 \text{ cm}^3$  ou  $160\pi$  ainda destas mesmas produções um aluno escreveu “colocar  $502,4 \text{ cm}^3$ ” e outro “deverá colocar  $502,4 \text{ cm}^3$  de água para encher 20 copos pela metade”. Além disso, dos 12 alunos, 5 dividiram oito por 4 obtendo 2 e dividiram 20 por 4 obtendo 5, podemos inferir que os alunos encontraram a razão entre o diâmetro da leiteira e o diâmetro do “copinho”, mas também encontraram a razão entre a altura da leiteira e a altura do “copinho”. E, de todas as produções, 1 aluno obteve como resultado “ $V=32$ ”, podemos inferir que este resultado foi a tentativa de calcular o volume do “copinho”, pois o aluno calculou “ $\pi \cdot 2^2 \cdot 4$ ” que é a maneira de se calcular o volume do “copinho”.

## 2.6. Considerações

Após concluirmos a execução do PROMAT, notamos que essa primeira parte do Estágio Supervisionado I, é indispensável para a formação do educador, sendo uma maneira de aplicação de metodologias aprendidas no decorrer do curso e, do aprimoramento da prática docente, pelo fato de ser o primeiro contato entre nós, futuros professores, e alunos. Inclusive, a experiência adquirida nesta etapa será utilizada como auxílio para atuações profissionais no futuro.

O Estágio Supervisionado I, nos ajudou tanto na prática docente, quanto no amadurecimento como profissionais, visto que foi exigido cumprimento de prazos, explanação das atividades para socialização e confecção de materiais.

Podemos considerar também, que os relatos das aulas e a socialização entre colegas nos ajudaram a aprimorar o planejamento das próximas aulas, proporcionando assim, um melhor desempenho nas atividades realizadas.

### **3. Projeto Dia da Matemática**

#### **3.1. Planejamento dia da Matemática**

#### **DIA DA MATEMÁTICA 09/05/2019**

##### **Público-Alvo:**

Alunos do 7º ano A, 7º ano B e 8º ano A, do Ensino Fundamental do Colégio Marechal Castelo Branco – EFM.

##### **Tempo de execução:**

O projeto é composto por 8 horas/aula, sendo 3 horas/aula utilizadas para planejamento e confecção dos materiais e 5 horas/aula utilizadas para a aplicação do projeto.

##### **Objetivo Geral:**

Divulgar o Dia Nacional da Matemática e promover a integração dos alunos;

Elencar fatos históricos importantes, estimulando os alunos a relacionar a história da matemática com sua aplicação na atualidade;

Realizar atividades lúdicas e dinâmicas envolvendo conteúdos de matemática;

Promover a integração entre os alunos;

##### **Objetivos Específicos:**

Obter o conhecimento da existência do Dia Nacional da Matemática, da lei federal que o rege e a relação desta data com a história de Malba Tahan;

Conhecer um pouco da história de Malba Tahan e suas publicações, bem como seus principais contos e livros;

Ter um momento de recreação, trabalhando a Matemática de forma divertida e interessante;

##### **Encaminhamento metodológico:**

Para a realização do projeto, primeiramente será explicado para os alunos, em sala de aula, como a gincana da matemática será desenvolvida, e os locais que cada atividade será desenvolvida. Então, os alunos serão deslocados até o pátio da escola, onde serão desenvolvidas todas as atividades da Gincana da Matemática. As atividades que serão utilizadas:

### Jogo da Velha

O jogo consiste em formar duas equipes para competir entre si. Serão colocados, do lado oposto dos alunos, o tabuleiro, produzido com fita crepe, em formato de jogo da velha e cada equipe receberá um peso em cor diferente.

Quando foi dado o sinal, o primeiro da fila de cada equipe, corre até o bambolê e escolhe um local para colocar o peso da sua equipe. Esse participante volta correndo para que o próximo da fila possa ir.

O segredo do jogo será formar o mais rápido possível uma sequência de três cores iguais ou tentar impedir que a outra equipe consiga formar a sequência. Precisam pensar rápido e agir com estratégias para conseguir vencer.

### Código do Prisioneiro

Para realizar essa atividade, utilizaremos o quadro da figura abaixo.

**Figura 72: Código do prisioneiro**



|   | O CÓDIGO DO PRISIONEIRO |   |   |   |     |
|---|-------------------------|---|---|---|-----|
|   | 1                       | 2 | 3 | 4 | 5   |
| 1 | A                       | B | C | D | E   |
| 2 | F                       | G | H | I | J K |
| 3 | L                       | M | N | O | P   |
| 4 | Q                       | R | S | T | U   |
| 5 | V                       | W | X | Y | Z   |

**Fonte:** Acervo dos autores

A partir desse quadro, os alunos devem encontrar qual a palavra que indica o próximo local. Para isso, indicaremos as letras através de batidas, o número de batidas indica a linha que a letra se encontra, após uma pausa, as outras batidas indicarão a coluna referente a letra daquela linha.

Tempo: 5 minutos

Pontuação: 10 pontos, se encontrar o local correto

### Torre de Hanói Humana

Essa prova consiste em três hastes e três discos onde as hastes são representadas por integrantes do grupo. Para iniciar o jogo três pessoas da equipe devem sentar-se um ao lado do outro para representar as hastes. Serão então colocados os três discos na primeira pessoa (considerando a ordem esquerda – direita) de forma em que os discos maiores fiquem sempre sob os seus menores. O jogo é finalizado quando todos os discos estiverem posicionados na última haste (esquerda – direita) de forma a cumprir as ordens de posição referente ao seu tamanho.

#### **REGRAS:**

- I. Os discos devem ser posicionados de forma decrescente (nenhum disco de menor diâmetro pode ficar sob um de maior diâmetro).
- II. Pode-se mover apenas 1 disco a cada jogada.
- III. Cada disco só pode ser movido para a haste localizada ao seu lado.

Tempo: 10 minutos

Pontuação: 10 pontos se cumprir a prova.

#### **Medidas**

Nesta tarefa, os alunos deverão cortar um barbante, de modo que corresponda a um metro ou o mais perto disso. Também deverão sentir o peso de dois recipientes, um com arroz e o outro com areia, e indicar quanto pesa cada recipiente. Essa atividade abordará noções de massa e tamanho de objetos (barbante).

Tempo: 5 minutos

Pontuação: 10 pontos para quem acertar as medidas, 5 para o grupo que se aproximar da medida e 0 pontos para quem não acertar.

#### **Bolinha no Cesto**

Para esta atividade será utilizada bolinhas de piscina, um cesto e perguntas sobre Matemática.

Cada grupo irá dispor de 10 bolinhas, e deverá arremessar no cesto que estará a 3 metros de distância de onde os integrantes do grupo devem ficar. A quantidade de bolinhas acertadas será a mesma quantidade de perguntas que eles devem responder.

Tempo: 2 minutos para cada questão

Pontuação: 1 ponto por questão.

#### **Bastão de Licurgo**

O Bastão de Licurgo foi uma técnica utilizada para enviar mensagens secretas por militares gregos em 487 a.C. Para isso, era enrolada uma tira em forma de espiral em um bastão e escrito alguma mensagem e, ao retirar a tira do bastão, novas letras eram escritas na tira para que a mensagem escrita ficasse oculta. Ao enrolar a tira novamente no bastão, era possível ver a mensagem escrita. Na atividade para a gincana, utilizaremos um bastão de madeira e uma tira de papel com uma palavra codificada, e o grupo deverá encontrar qual é a palavra secreta, que terá a dica para ir ao próximo local.

Tempo: 5 minutos

Pontuação: 10 pontos, se decodificado.

### Caça-Palavras

Para essa atividade, confeccionamos um caça-palavras com 10 palavras matemáticas, conforme figura abaixo.

**Figura 73: Caça-palavras**



**Fonte:** Acervo dos autores

As palavras que podem ser encontradas no caça-palavra são: matemática, retângulo, triângulo, ponto, reta, número, fração, ângulo, polígono, adição.

Tempo: 5 minutos

Pontuação: 1 ponto por palavra encontrada

### Contação de Histórias do Malba Tahan

Indagaremos os alunos para sabermos se eles têm conhecimento a respeito do que é comemorado na data de 6 de maio e de sua história. Após tramitar por muito tempo um projeto de lei foi finalmente sancionado em 26 de junho de 2013 como lei nº 12.835. Essa lei instituiu oficialmente o dia 6 de maio, data de nascimento de Malba Tahan, como Dia Nacional da Matemática. O objetivo da criação desta lei é incentivar a promoção de atividades educativas e culturais alusivas à referida data.

O dia da matemática é uma data comemorada informalmente há muitos anos pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Esta data foi escolhida em homenagem ao matemático, escritor e educador brasileiro Júlio Cezar de Mello de Souza, mais conhecido como Malba Tahan, que nasceu no dia 06 de maio de 1895, no Rio de Janeiro. Júlio Cezar de Mello Souza começou a lecionar quando tinha apenas 18 anos. Formou-se em Engenharia civil, mas devido ao seu grande amor pela escrita e pela matemática nunca exerceu esta profissão. Júlio juntou suas duas grandes paixões e começou a escrever histórias que envolviam matemática e publicou-as em um jornal local usando um pseudônimo para assinar suas obras, por ter medo de não serem aceitas pela sociedade em geral.

Júlio Cezar era um grande admirador da cultura árabe, e por este motivo, passou a incluí-la em suas obras e passou a usar um pseudônimo árabe também: Ali Izzid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan. Após ter escrito diversos contos assinados com este pseudônimo, finalmente, em 1925, Júlio pode lançar seu primeiro livro: contos de Malba Tahan. Com fama deste livro, em 1933 Júlio foi reconhecido como o verdadeiro autor do livro.

Malba Tahan publicou 120 livros, dos quais 51 são voltados para a matemática. Em suas obras conseguiu repassar o conteúdo matemático em histórias envolventes, constituídas de enigmas e fantasmas, tornando-as sempre aventuras divertidas e empolgantes. Malba Tahan conseguiu transmitir a matemática de forma memorável, e é inegável que ele tendo juntado suas duas paixões: a matemática e a escrita, fez com que ele fizesse um sucesso tremendo, de forma que até o dia de sua morte já havia vendido mais de um milhão de seus livros, e seu livro mais famoso, “O homem que calculava”, tornou-se um Best-seller e até hoje é muito atrativo para as novas gerações.

## **Programação**

Para a realização de cada atividade, serão utilizados locais específicos, no quadro abaixo está a relação de cada atividade com seu determinado local:

**Quadro 13: Programação Dia da Matemática**

| <b>Atividade</b>      | <b>Local</b> |
|-----------------------|--------------|
| Jogo da velha         | Quadra       |
| Código do Prisioneiro | Ping-Pong    |
| Torre de Hanói Humana | Espiribol    |
| Caça-Palavras         | Mesinhas     |
| Medidas               | Palco        |
| Bastão de Licurgo     | Bicicletário |
| Bolinhas no Cesto     | Bebedouro    |
| Contação de Histórias | Refeitório   |

**Fonte:** Acervo dos autores

As salas serão divididas em quatro grupos e cada grupo receberá faixas de TNT com diferentes cores para identificação. Além disso, os grupos terão uma sequência de atividades programadas.

**Grupo 1:** Quadra, ping-pong, espiribol, mesinhas, palco, bebedouro, bicicletário e refeitório. Ao terminar o jogo da velha, o grupo receberá a dica “Ping-Pong”, com isso deverá se deslocar até as mesas de ping-pong onde terá a atividade Código do Prisioneiro, ao decodificar a palavra através deste método, encontrará “Espiribol”, então deve se deslocar até este local, no qual terá a atividade Torre de Hanói que, ao concluir, receberá a dica “Mesinhas”, onde terá a atividade Caça-palavras, e ao resolver receberá a dica “Palco” que, por sua vez, terá a atividade Medidas, ao concluir receberá a dica “Bicicletário” e neste local terá a atividade Bastão de Licurgo que, ao decifrar, terá a dica “Refeitório”.

Para resumir, abaixo está apresentado como será o percurso do grupo

- Jogo da velha terá dica “Ping-Pong”
- Código do Prisioneiro terá a dica “Espiribol”
- Torre de Hanói terá a dica “Mesinhas”
- Caça-Palavras terá a dica “Palco”
- Medidas terá a dica “Bebedouro”
- Bolinhas na Cesta terá a dica “Bicicletário”
- Bastão de Licurgo terá a dica “Refeitório”.

**Grupo 2:** Quadra, bicicletário, ping-pong, espiribol, mesinhas, palco, bebedouro e refeitório.

As atividades ocorrerão da mesma maneira que foi explicado no grupo 1, mas a ordem será diferente e, por consequência, a dica de cada lugar irá mudar.

- Jogo da velha terá a dica “Bicicletário”
- Bastão de Licurgo terá a dica “Ping-Pong”
- Código do Prisioneiro terá a dica “Espiribol”
- Torre de Hanói terá a dica “Mесinhas”
- Caça-Palavras terá a dica “Palco”
- Medidas terá a dica “Bebedouro”
- Bolinhas no cesto terá a dica “Refeitório”.

**Grupo 3:** Quadra, bebedouro, bicicletário, ping-pong, espiribol, mesinhas, palco e refeitório.

- Jogo da velha terá a dica “Bebedouro”
- Bolinha na Cesta terá a dica “Bicicletário”
- Bastão de Licurgo terá a dica “Ping-Pong”
- Código do Prisioneiro terá a dica “Espiribol”
- Torre de Hanói terá a dica “Mесinhas”
- Caça-Palavras terá a dica “Palco”
- Medidas terá a dica “Refeitório”.

**Grupo 4:** Quadra, palco, bebedouro, bicicletário, ping-pong, espiribol, mesinhas e refeitório.

- Jogo da velha terá a dica “Palco”
- Medidas terá a dica “Bebedouro”
- Bolinha na cesta terá a dica “Bicicletário”
- Bastão de Licurgo terá a dica “Ping-Pong”
- Código do Prisioneiro terá a dica “Espiribol”
- Torre de Hanói terá a dica “Mесinhas”
- Caça-palavras terá a dica “Refeitório”.

### **Expectativas:**

Esperamos, com este projeto, poder atender à expectativa, da escola em relação à Universidade, no que diz respeito a trazer para o Ensino Fundamental formas diferenciadas de

ensinar Matemática pautadas em pesquisas. Com isso também retribuir o acolhimento que a escola sempre nos oferece para a execução de nossos estágios de prática de ensino.

Ainda esperamos que os estudantes do oitavo e sétimos e anos se envolvam nas dinâmicas que serão desenvolvidas de modo a que cada uma delas possa contribuir com a consolidação do seu conhecimento matemático, que eles aprendam matemática e saiam deste projeto com seu gosto pela disciplina fortalecido.

### **Referências**

BRASIL. Lei Federal nº12 835, de 26 de junho de 2013, que institui o Dia Nacional da Matemática. Casa Civil, subchefia para assuntos jurídicos. Brasília, DF, 26 de junho de 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan **Por que se ensina Matemática?** Disponível em:

<<http://apoio Londrina.pbworks.com/f/Por%2520que%2520ensinar%2520Matematica.pdf>>

Acesso em: 20 jul. 2017.

### 3.2. Relatório Dia da Matemática

#### Relatório do Dia da Matemática 09/05/2019 (8 horas-aula)

Aos nove dias do mês de maio de dois mil e dezenove, reuniram-se nas dependências do Colégio Estadual Marechal Castelo Branco, nós estagiários do terceiro ano da disciplina de Metodologia e Estágio Supervisionado I do curso de Licenciatura em Matemática, para desenvolver as atividades do Dia da Matemática.

As atividades propostas no projeto do Dia da Matemática foram aplicadas em três turmas do colégio mencionado, este texto irá apresentar o relato do desenvolvimento das atividades em cada turma.

Conforme o projeto, havíamos planejado de iniciar com todos os grupos na quadra para desenvolver a atividade Jogo da Velha e então prosseguir com as demais, entretanto no momento que iríamos desenvolver a atividade a quadra estava molhada, portanto decidimos deixar o Jogo da Velha como sendo a última atividade e no refeitório, isto foi aderido para todas as turmas.

#### 7º ano A

**Código do Prisioneiro:** Nesta atividade, iniciamos falando um pouco sobre a utilidade do Código do Prisioneiro para que os alunos tivessem ideia de como a comunicação pode ser feita de várias maneiras. Os grupos apresentaram dificuldades semelhantes na realização desta atividade, tais como inicialmente trocar linha com coluna, trocar letras e a necessidade da repetição das batidas, entretanto apresentaram estratégias semelhantes também, como tentar adivinhar o local sabendo poucas letras da palavra. A atividade se desenvolveu bem em todos os grupos e não foi necessário dizer qual era o próximo local, pois todos concluíram a atividade.

**Torre de Hanói:** Esta atividade despertou bastante interesse nos alunos, pois a maioria não conhecia o tradicional jogo Torre de Hanói, então tivemos que explicar algumas vezes como funcionaria a atividade, mas os alunos compreenderam como deveria ser feito e alguns grupos realizaram mais que uma vez, cada integrante do grupo quis resolver pelo menos uma vez, o que nos deu a entender que esta atividade chamou atenção destes alunos. Todos os grupos concluíram a atividade e prosseguiram com a gincana.

**Caça-Palavras:** Nessa atividade, a maioria dos grupos encontraram algumas palavras, como “ponto”, “triângulo”, de maneira muito rápida, porém somente nos últimos segundos

encontraram as palavras “adição” e “fração”. No fim da atividade, ao receberem a próxima dica, se dirigiram rapidamente ao local.

**Medidas:** Para a realização dessa atividade, entregamos dois potes, um com dois quilos de feijão e outro com um quilo e cem gramas de arroz, para os alunos e pedimos que falassem quanto de medida tinha em cada pote. Um dos grupos, relacionaram que havia dois pacotes de feijão, somando dois quilos e um quilo de arroz, pois era metade da quantidade de feijão. Notamos que os alunos usaram medidas conhecidas no dia-a-dia para chegarem a conclusão muito próxima dos pesos exatos. Para a segunda parte da atividade, pedimos que os grupos mostrassem um pedaço de barbante que consideravam que seria um metro. Para conferir, medimos os barbantes, e notamos que todas as medidas se aproximaram de um metro, variando vinte centímetros para mais ou para menos.

**Bastão de Licurgo:** Na atividade do bastão de Licurgo que aconteceu no bicicletário da escola todos os grupos descobriram rapidamente a palavra que mostrava o próximo destino. Inicialmente alguns grupos tiveram dificuldade para entender como utilizar o bastão e a folha dada principalmente com dúvidas em relação a qual das pontas utilizar. Foi notado que a falta de entendimento da atividade se deu principalmente ao fato de ela ser considerada “simples demais”, uma vez que uma atividade simples pode ser mais difícil de explicar do que uma mais complexa. Geralmente em dois membros de cada grupo era o suficiente para descobrir o próximo destino do grupo.

**Bolinhas no Cesto:** Nessa atividade os grupos tiveram um desenvolvimento semelhante principalmente na quantidade de bolas acertadas no cesto. Inicialmente ao falar sobre a atividade os grupos tinham a ideia de não acertar nenhuma bola no cesto para que não precisassem responder nenhuma questão. No momento das respostas para as questões sorteadas cada grupo tinha um total de 2 minutos de tempo para responder cada questão, porém nenhum grupo utilizou o tempo inteiro, geralmente sobrando mais da metade. Foi observado grande debate entre os membros de cada grupo até chegar em uma resposta final. Algumas questões geraram mais dúvidas entre os alunos geralmente resultando em uma resposta final equivocada. Uma das questões era a seguinte: “Qual é a área de um quadrado de lado 3cm?”, nessa questão os grupos geralmente não recordavam a fórmula da área ou confundiam ela com a fórmula do perímetro. Em um dos casos o grupo multiplicou todos os lados tendo como resposta  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81\text{cm}^2$  de área para o quadrado. Outra questão que gerou muita dúvida nos grupos foi a seguinte: “Qual é o conjunto dos números Naturais?”, nessa questão nenhum grupo soube

responder corretamente, geralmente a conclusão em que os alunos chegavam é que o conjunto dos números naturais era composto pelos números inteiros de 0 a 9 ou pelos números de 1 a 9.

**Jogo da Velha:** Organizamos a princípio a atividade na quadra de esportes aberta e iniciariamos as provas com ela, mas devido as condições climáticas tivemos que alterar o local da prova para o refeitório e deixá-la por último. Os alunos compreenderam rapidamente as regras e demonstraram bastante interesse e competitividade. A principal dificuldade observada durante a prova foi em relação a demora para trocar a posição do marcador, para solucionar o problema delimitamos um tempo de dez segundos para realizar a troca. Observamos que os pontos dessa prova foram decisivos para as equipes vencerem ou perderem.

**Contação de História:** Após a divulgação dos resultados e da premiação para cada um dos grupos, orientamos os alunos a se sentarem. Iniciamos questionando o porquê de estarmos realizando estas atividades com a turma, após algumas respostas, explicamos que dia 6 de maio é o dia da matemática e o motivo de ser comemorado nesta data o dia da matemática, percebemos que a maioria desconhecia essa data e demonstraram interesse conhecer mais essa história. Explicamos também um pouco sobre a vida de Malba Tahan e o seu trabalho, em seguida apresentamos o livro O homem que calculava, neste momento o Guilherme explicou que ganhou o livro da biblioteca da escola e que tinha mais exemplares caso tenham interesse de realizar a leitura. Encerramos as atividades com a turma realizando a leitura do conto “Os 35 camelos” do livro de Malba Tahan, explicamos a matemática utilizada pelo personagem para a solução do problema no conto, os alunos acharam interessante a história e a solução.

## 8º ano A

**Código do Prisioneiro:** Os alunos a princípio compreenderam bem as regras e de como seria realizada a atividade, devido a agitação e a pressa para concluir a atividade muitas vezes confundiam linhas, colunas ou até mesmo o número de batidas. A maioria dos grupos conseguiu encontrar a pista antes de se concluir todas as letras. Os grupos que aguardavam para realizar esta atividade tinham bastante curiosidade e tentavam ter pistas de como jogar para facilitar o momento que fossem jogar.

**Torre de Hanói:** A maioria dos grupos sentiu um pouco de dificuldade em conseguir entender as regras dessa atividade, pois não conheciam a tradicional torre de Hanói. Geralmente um do grupo após um tempo compreendia como realizar a atividade e explicava para os demais. Enquanto aguardavam a próxima prova incentivamos que os alunos dos grupos realizassem a atividade pelo menos uma vez. Os alunos demonstraram interesse por conhecer a torre de Hanói original após essa prova.

**Caça-Palavras:** Esta turma desenvolveu a atividade rapidamente, encontraram as 10 palavras. Entretanto apresentaram dificuldade para encontrar a palavra “adição”, visto que estava escrito como “adicao”, então foi dada uma dica: uma das palavras é relacionado as quatro operações”. Com isso completaram a atividade e prosseguiram a gincana.

**Medidas:** A maioria dos alunos se aproximaram das medidas dos objetos da atividade, percebemos que cada aluno dos grupos realizavam a aproximação da medida e entre eles entravam em consenso para dar uma resposta a nós. Alguns dos alunos disseram valores bem diferentes, mas perguntávamos a eles e realizavam a medida novamente, acreditamos que ouvindo a resposta de seus colegas, estes alunos mudavam de ideia e se adequavam as medidas estabelecidas pelos integrantes do grupo. Ao final da gincana pesamos os alimentos e medimos o barbante e os alunos puderam comparar com suas respostas para saber o quanto se aproximaram.

**Bastão de Licurgo:** Nessa atividade, explicamos o contexto histórico em que o bastão era utilizado, e em seguida entregamos o bastão e a tira de papel com as letras, cada grupo com uma tira diferente. Rapidamente, um aluno de cada grupo pegava o bastão e a tira e ia fazendo tentativas até encontrar a palavra correspondente a próxima dica.

**Bolinhas no Cesto:** Para iniciar a atividade, colocamos os alunos lado a lado e entregamos dez bolinhas, para que fossem arremessadas no cesto, sabendo que cada bola no cesto daria direito a uma pergunta, e cada resposta correta era um ponto que a equipe ganhava. Uma das perguntas sorteada é “Quanto é  $7^2$ ?”, rapidamente alguns alunos responderam “é catorze, tenho certeza, sei a tabuada” e nós questionamos o motivo dessa resposta, os alunos responderam que “sete vezes dois é catorze”. Notamos que a turma havia muitas dificuldades, inclusive, mencionaram que ainda não conheciam o conjunto dos números racionais, quando mencionamos que 1,5 pertence ao conjunto dos racionais.

**Jogo da Velha:** O jogo da velha foi realizado entre dois grupos, denominadas de equipes, sendo que estas foram organizadas pela ordem de chegada. Notamos muita participação dos alunos durante as etapas. A fim de que todos participassem e para garantir uma evolução constante, pré-determinamos um tempo para cada jogada, estimulando que todos os membros da equipe fizessem, pelo menos, uma jogada. As jogadas feitas pelos alunos foram bem pensadas, por exemplo, evitavam que o adversário ganhasse, colocando o peso no possível local que a equipe colocaria e levaria a vitória. Os alunos demonstraram um ótimo trabalho em equipe e revelaram boas estratégias em curtos períodos de tempo. Os grupos se divertiram muito

durante o jogo, mostrando-se muito participativos e interessados. Acreditamos que a competição tenha estimulado estes alunos a participarem mais da aula.

**Contação de História:** Depois de concluída todas as atividades juntamos todas as equipes para falar um pouco sobre o dia da matemática ao qual ninguém sabia existir e contar uma história do livro “O homem que calculava” de Malba Tahan. Uma boa parte dos alunos se mostraram interessados, e muitos não sabiam da existência de nenhuma informação passada no momento. Muitos deles focaram pouco no assunto devido a agitação das atividades recém-concluídas, notamos que eles gostaram muito da história e da descoberta pelo dia da matemática.

### **7º ano B**

**Código do Prisioneiro:** Nessa atividade todos os grupos entenderam e concluíram muito bem, porém os grupos tiveram mais dificuldade em encontrar as letras conforme as batidas dadas. Foram observados vários casos ao qual aconteceram igualmente entre os grupos. Os grupos se confundiam na palavra depois de algumas letras deduzidas pois não anotavam em nenhum lugar e inicialmente não conseguiam identificar o espaço de tempo entre as batidas para linhas e colunas conseqüentemente havendo a necessidade da repetição das batidas. Foi notado que a maioria dos integrantes de todos os grupos inicialmente não sabiam identificar linha e coluna.

**Torre de Hanói:** Nessa atividade os grupos mostraram uma rapidez inesperada para resolver. Inicialmente os integrantes não conseguiram relacionar a torre de Hanói humana com a torre “padrão” já vista e manipulada por eles. Após fazerem a relação os grupos escolheram logicamente a posição de cada um para continuar a atividade, porém na maioria dos grupos todos os integrantes ajudaram muito para completar a atividade.

**Caça-Palavras:** Por já conhecerem o caça palavras os grupos estavam bem agitados para realizar a atividade. A maioria dos grupos encontrou todas as palavras, sentindo dificuldade em encontrar as últimas palavras do jogo e as palavras que possuem acentuação, pois no caça palavras estavam sem a acentuação. Ao concluírem a atividade os grupos apagavam bem as palavras para não facilitar que os outros grupos as encontrassem.

**Medidas:** A maioria dos grupos estimaram bem as medidas dos potes e de um metro com o barbante, para tanto, buscaram associar com as medidas que já conheciam, como o peso de um pacote de feijão ou de arroz, e para aproximar quanto era um metro, buscavam associar com a sua medida de altura. Alguns alunos buscaram encontrar no pote a sua capacidade, pois em alguns tem escrito.

**Bastão de Licurgo:** Nesta atividade, iniciamos contando sobre a utilidade do Bastão de Licurgo, e se início os alunos não apresentaram reações de que realmente iria formar uma palavra, então explicamos como funcionaria a atividade e com isso eles formaram a palavra para poder ir para o próximo local. Percebemos que quando os alunos descobriam a palavra codificada ficavam surpresos de que realmente formava uma palavra, alguns alunos comentaram que seria bem difícil alguém saber que frase estaria codificada quando era utilizada na guerra, por exemplo.

**Bolinhas no Cesto:** Os alunos não acertaram muitas bolinhas no cesto, entretanto as questões sorteadas por eles, em geral, foram quase todas respondidas corretamente. Um dos grupos sorteu a pergunta “qual a área de um quadrado de lado 3 cm?”, como isso um dos alunos perguntou como calcularia a área se não sabiam a altura, então perguntamos a ele qual a relação entre os lados do quadrado, com isso outro aluno respondeu que os lados são iguais. Diante disso, deixamos que este aluno pensasse e com a ajuda de seus colegas deram a resposta “9 cm”, então perguntamos se a unidade de área é cm, logo responderam que neste caso é  $\text{cm}^2$ . Outra pergunta que nos chamou atenção foi “quanto é  $12 \div 3 \times (2 + 1)$ ?”, pois alguns alunos não levaram em consideração a ordem das operações e com isso não deram a resposta esperada. Mesmo respondendo equivocadamente, explicamos a estes alunos a ordem das operações e como deveria ser feito neste caso.

**Jogo da Velha:** Nessa atividade, os dois grupos que chegaram primeiro ao refeitório competiram primeiro e os dois últimos grupos a chegar competiram em seguida. Os alunos de todas as equipes se mostraram muito competitivos, pois quando um aluno ia colocar o peso, os outros da equipe ficavam dando dicas e vibrando em cada jogada. Notamos também que ao colocarmos tempo em cada jogada, os alunos se sentiam pressionados e jogavam de maneira rápida, sem muito raciocínio, ocasionando a vitória da equipe adversária, porém em muitos casos a outra equipe não notava o equívoco e continuava jogando, sem se dar conta do erro cometido.

**Contação de História:** Iniciamos questionando se os alunos sabiam o motivo da gincana que acabavam de participar, muitos balançaram a cabeça, mostrando que não conheciam o motivo e a partir disso, iniciamos a contação de uma história do livro do Malba Tahan. Por fim, explicamos que estávamos comemorando o dia da matemática, ocorrido no dia seis de maio. No início da atividade os alunos ainda estavam muito eufóricos pela vitória ou derrota na atividade anterior, mas conforme a história ia se desenrolando eles prestaram mais

atenção. Por fim, incentivamos que os alunos lessem algumas histórias desse livro e alguns se mostraram interessados em pesquisar mais.

No apêndice I, segue algumas fotos da aplicação da Gincana do Dia da Matemática.

## Apêndice I





