

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CAMPUS CASCAVEL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CLÍCIA LUIZA PAZA
GABRIEL TALINI DA SILVA
PEDRO GABRIEL FERREIRA ANZOLIN

**RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE
MATEMÁTICA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT**

CASCAVEL
2025

CLÍCIA LUIZA PAZA
GABRIEL TALINI DA SILVA
PEDRO GABRIEL FERREIRA ANZOLIN

**RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE
MATEMÁTICA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT**

Relatório das atividades desenvolvidas durante o projeto Promat, como requisito parcial à aprovação na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado I do Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus Cascavel.

Orientador: Tiago Emanuel Klüber

CASCADEL
2025

Este projeto é dedicado aos nossos alunos e familiares pela parceria, paciência e compreensão. Todo o apoio e atenção dedicados a nós foram imprescindíveis para a concretização deste trabalho.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Os diversos tipos de tarefas	14
Figura 2: Atividade feita por um dos estudantes	16
Figura 4: Atividade com <i>Algeplan</i> feita pelos estudantes.....	18
Figura 5: Diagrama de Vennn com três conjuntos.....	38
Figura 6: Conjuntos numéricos.....	38
Figura 7: Diagrama	41
Figura 8: Diagrama de Venn com três conjuntos.....	44
Figura 9: Planta baixa.....	59
Figura 10: Exemplo de planta baixa	61
Figura 11: Planta baixa com medidas.....	63
Figura 12: Planificação do cubo.....	73
Figura 13: Planificação do prisma reto de base pentagonal.....	74
Figura 14: Planificação do prisma reto com base quadrangular	74
Figura 15: Planificação da pirâmide de base quadrangular	75
Figura 16: Planificação do prisma de base triangular	75
Figura 17: Planificação da pirâmide de base triangular - tetraedro.....	75
Figura 18: Planificação do octaedro	76
Figura 19: Planificação do dodecaedro.....	76
Figura 20: Representações de Polígonos.....	78
Figura 21: Imagens de polígonos e não polígonos	80
Figura 22: Polígonos e não polígonos	80
Figura 23: Imagens de polígonos côncavos e convexos	81
Figura 24: Polígonos convexos e não convexos.....	82
Figura 25: Relação base e altura	83
Figura 26: Relação do paralelogramo.....	83
Figura 27: Relação do triângulo.....	83
Figura 28: Relação do trapézio.....	84
Figura 29: Relação do losango	84
Figura 30: Losango	84
Figura 31: Relação do hexágono.....	85
Figura 32: Exemplo de um triângulo	92
Figura 33: Triângulos	93

Figura 34: Triângulo Equilátero.....	93
Figura 35: Triângulo Isósceles.....	93
Figura 36: Triângulo escaleno.....	94
Figura 37: Triângulo Acutângulo.....	94
Figura 38: Triângulo Retângulo.....	94
Figura 39: Triângulo Obtusângulo.....	95
Figura 40: Semelhança Ângulo-Ângulo.....	95
Figura 41: Semelhança Lado-Ângulo-Lado.....	95
Figura 42: Semelhança Lado-Lado-Lado.....	95
Figura 43: Passo 1.....	96
Figura 44: Passo 2.....	96
Figura 45: Passo 3.....	97
Figura 46: Passo 4.....	97
Figura 47: Relação base e altura.....	97
Figura 48: Relação do paralelogramo.....	98
Figura 49: Relação da área do paralelogramo com o triângulo.....	98
Figura 50: Relação do triângulo com o retângulo.....	99
Figura 51: Relação do trapézio.....	99
Figura 52 :Relação do Losango.....	99
Figura 53: Losango.....	100
Figura 54: Relação do hexágono.....	100
Figura 55: Algeplan.....	106
Figura 56: Representação negativa.....	107
Figura 57: Tabuleiro.....	117
Figura 58: Exemplo de 4 quartas inserido no jogo.....	118
Figura 59: Anotações de Rodrigo.....	121
Figura 60: Figura geométrica formado por retângulos.....	124
Figura 61: Diálogo entre Gabriel e Marcos.....	125
Figura 62: Funções apresentadas no Software Geogebra.....	142
Figura 63: Dodecaedro.....	145
Figura 64: Tronco de pirâmide.....	145
Figura 65: Prisma retangular.....	145
Figura 66: Octaedro.....	145
Figura 67: Pirâmide de base pentagonal.....	145

Figura 68: Pirâmide de base triangular	145
Figura 69: Icosaedro	145
Figura 70: Pirâmide de base quadrada.....	145
Figura 71: Paralelepípedo retângulo.....	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Questionário 01.....	26
Tabela 2: Exemplo de separação dos grupos.....	35
Tabela 3: Os oito deltaedros convexos.....	76
Tabela 4: Polígonos – relação das diagonais	79
Tabela 5: Tabela para agrupar polígonos e não polígonos.....	80
Tabela 6: Tabela para agrupar polígonos convexos e côncavos	81
Tabela 7: Nomenclatura dos polígonos	82
Tabela 8: Passo a passo do truque com exemplos.	110
Tabela 9: Descrição de cada poliedro	145

SUMÁRIO

SUMÁRIO.....	7
INTRODUÇÃO	9
SOBRE O PROMAT.....	10
REFLEXÕES ACERCA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO I.....	11
RESUMO	11
INTRODUÇÃO.....	11
FUNDAMENTAÇÃO	13
RELATO DA EXPERIÊNCIA E REFLEXÕES.....	16
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	20
REFERÊNCIAS	21
PROMAT	22
AULA 01 (10/05/2025) – PLANO DE AULA.....	22
Plano de aula – Show do Milhão – 10/05/2025	22
Relatório da aula ministrada - 10/05/2025	32
AULA 02 (17/05/2025) – PLANO DE AULA.....	34
Plano de Aula – Conjunto e Expressões – 17/05/2025	34
Relatório da aula ministrada – 17/05/2025	41
AULA 03 (24/05/2025) – PLANO DE AULA.....	42
Plano de Aula – Frações e Porcentagem 24/05/2025	42
Relatório da aula ministrada - 24/05/2025	54
AULA 04 (31/05/2025) - PLANO DE AULA.....	58
Plano de Aula – Razão, Proporção e Regra de Três – 31/05/2025..	58
Relatório da aula ministrada – 31/05/2025	70
AULA 05 (07/06/2025) - PLANO DE AULA.....	71
Plano de Aula – Polígonos e Poliedros – 07/06/2025	71
Relatório da aula ministrada – 07/06/2025	89
AULA 06 (14/06/2025) - PLANO DE AULA.....	91
Plano de Aula – Triângulos e Áreas de Polígonos 14/06/2025	91
Relatório da aula ministrada – 14/06/2025	103
AULA 07 (21/06/2028) - PLANO DE AULA.....	104

Plano de Aula – Expressões Algébricas e Polinômios - 21/06/2025	104
Relatório da aula ministrada – 21/06/2025	114
AULA 08 (28/06/2025) - PLANO DE AULA	116
Plano de Aula – Equações - 28/06/2025	116
Relatório da aula ministrada – 28/06/2025	134
AULA 09 (05/07/2025) - PLANO DE AULA	135
Plano de Aula – Função do 1º grau - 05/07/2025	135
Relatório da aula ministrada – 05/07/2025	141
AULA 10 (12/07/2025) - PLANO DE AULA	143
Plano de Aula – Dinâmica Final - 12/07/2025	143
Relatório da aula ministrada 12/07/2025	146
CONSIDERAÇÕES FINAIS	148
REFERÊNCIAS	150

INTRODUÇÃO

Neste relatório, temos como objetivo apresentar o trabalho desenvolvido na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática - Estágio Supervisionado I, no contexto das atividades do Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas (Promat), oferecido pelo curso de Matemática da Unioeste. Este documento foi elaborado pelos estagiários, Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva e Pedro Ferreira Anzolin, discentes da disciplina Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado I, que está presente na grade curricular do 3º ano do Curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel - PR.

As atividades do Promat foram realizadas nas dependências da Unioeste, com o objetivo de oferecer aulas de matemática voltadas para estudantes da rede pública que desejam ingressar no Ensino Superior, e para acadêmicos matriculados nos cursos de graduação da Unioeste. Essas aulas, direcionadas para conteúdos frequentemente abordados em vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), ocorreram ao longo de 10 encontros e seguiram um cronograma previamente definido. Os temas tratados incluíram uma avaliação diagnóstica através de quiz de questões, conjuntos numéricos e expressões, frações, decimais e porcentagem, razão, proporcionalidade e regra de três, polígonos, polígonos e poliedros, triângulos, expressões algébricas, equação de 1º e 2º grau, função de 1º grau e gráficos, gincana e encerramento.

O relatório está dividido em três partes principais. A primeira apresenta uma descrição geral do Promat, abordando seus objetivos, público-alvo, duração e propósitos. A segunda parte é dedicada a um artigo - Reflexões acerca da Investigação Matemática no Estágio Supervisionado I - que explicita o desenvolvimento e percepções sobre o uso da Investigação Matemática durante as aulas executadas pelos estagiários. Já a terceira parte, apresenta os planos utilizados, bem como as listas de exercícios, relatórios das aulas e materiais fornecidos aos estudantes.

SOBRE O PROMAT

O Promat é um curso preparatório de matemática voltado para alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior. Seu objetivo é contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos dos participantes e, ao mesmo tempo, auxiliar na formação de futuros professores, pois somos nós, acadêmicos de Matemática, que ministramos os encontros.

Cada módulo do Promat conta com 10 encontros, realizados aos sábados pela manhã, e tem como objetivo principal proporcionar experiências positivas tanto para os cursantes quanto para os estagiários, agregando conhecimento para ambas as partes envolvidas. Além disso, o Promat faz parte da prática curricular obrigatória do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste.

O público-alvo são alunos do Ensino Médio, acadêmicos de outras graduações ou qualquer pessoa que tenha dificuldades em matemática ou queira reforçar seus conhecimentos para vestibulares e concursos. Essa diversidade de motivos faz com que o Promat atenda a um público amplo, oferecendo uma experiência de aprendizagem diferenciada, que foge do formato tradicional das aulas escolares.

Os encontros foram organizados por nós, estagiários, com o acompanhamento da professora orientadora da disciplina de Metodologia I. Para cada sábado, preparamos os planos de aula e seus encaminhamentos metodológicos. Cada encontro tinha duração de aproximadamente três horas e vinte minutos, com participação média de 20 alunos por turma.

Neste módulo, trabalhamos conteúdos essenciais do Ensino Fundamental, como conjuntos, frações, expressões numéricas e algébricas, polígonos e poliedros, triângulos, equações do primeiro e segundo grau, razão e proporção, regra de três e funções do primeiro grau com seus gráficos. Buscando uma experiência mais significativa, as aulas tiveram como foco o uso da Investigação Matemática para o desenvolvimento e para despertar o senso investigativo dos alunos.

REFLEXÕES ACERCA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

RESUMO

Este artigo apresenta reflexões provenientes da prática pedagógica desenvolvida durante a participação no Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas (Promat). Essa atividade faz parte do estágio supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste, em Cascavel. Desenvolvido em dez encontros, ofereceu aos licenciandos o vivenciar à docência destacando os desafios, as inseguranças e os aprendizados que fazem parte do processo de formação docente. As atividades priorizaram a retomada de conceitos matemáticos, abordando temas encontrados durante o Ensino Fundamental II, anos finais. Foi majoritariamente desenvolvido sob uma abordagem investigativa, a qual permitiu maior protagonismo aos estudantes, notando-se um maior engajamento, curiosidade e construção ativa nos alunos, além de um amadurecimento significativo em relação à prática pedagógica. A experiência foi transformadora, expandindo a compreensão da complexidade do ensino e ressaltando a necessidade de estratégias inovadoras para tornar o ensino mais relevante.

Palavras-chave: Formação de Professores; Investigação matemática; Estágio Supervisionado.

INTRODUÇÃO

A produção desse artigo advém da prática pedagógica realizada durante o primeiro semestre da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I. O curso superior de Matemática da Unioeste do *Campus* de Cascavel - PR promove anualmente o Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área de Matemática – Promat, e que é destinado para os estudantes do Ensino Médio e Acadêmicos.

O Promat acontece ao decorrer dez encontros, que são realizados aos sábados de manhã no horário das 8h às 11h40min, no *Campus* da Unioeste de Cascavel – PR. Na edição de 2025, havia 15 estagiários na disciplina que foram dispostos em cinco turmas para a realização do Promat. Sendo assim, a divisão ficou com exatos três alunos da graduação do Curso de Matemática para cada turma. Cada grupo possuía seu orientador e havia também a docente da disciplina Arleni Elise Sella Langer dando todo suporte e apoio necessário na realização dos encontros.

Além disso, o Promat é um programa que possibilita a nós, futuros docentes, explorar diversas metodologias e compreender quais são mais eficazes no contexto

do ensino da matemática. Segundo Passerini (2007), o estágio supervisionado é essencial para a formação de futuros professores, pois aproxima os acadêmicos da realidade da sala de aula, possibilitando uma breve noção de suas docências futuras como professores formados, além de permitir a primeira experiência e contato com a sua profissão escolhida. O autor ressalta:

O Estágio Supervisionado além de representar uma aproximação do estudante com o seu campo de trabalho, pode promover análises sobre a realidade escolar, estimular a aplicação de novos meios de ensinar e desencadear discussões sobre o que ensinar, contribuindo para que os futuros professores lancem um 'novo olhar' sobre o ensino, a aprendizagem, a função do educador, e exerçam uma prática educativa contemporânea.

Nesse contexto, este artigo tem como objetivo apresentar reflexões sobre a experiência de estágio no Promat, enfocando o uso de atividades investigativas. Buscamos analisar nossas práticas docentes, as estratégias adotadas enquanto professores em formação e estudantes, bem como compreender como foram desenvolvidas as abordagens investigativas ao decorrer do projeto. Nossas expectativas, frustrações e a realidade são evidenciados ao longo do processo em que os aprendizados adquiridos e a contribuição dessa vivência para nossa formação profissional são enriquecidos.

No início das aulas, a organização ocorria de maneira mais tradicional, com base em exposições formais, resolução de exercícios e apresentação direta de conceitos. Contudo, com o apoio do professor orientador, a partir do terceiro encontro, foi possível reorganizar as práticas e adotar uma abordagem pautada em um paradigma investigativo. De acordo com Skovsmose (2000 p.14), “alguns exercícios podem provocar atividades de resolução de problemas, as quais poderiam transformar-se em genuínas investigações matemáticas.” No paradigma investigativo, podemos adaptar a forma de trabalhar conforme cada cenário, que é “um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação” como mencionado por Skovsmose (2000 p. 3). Nesse sentido, passamos a explorar os cenários para a investigação, afastando-nos da metodologia tradicional.

Como diz Skovsmose (2000, p. 6), “O cenário para investigação convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações, no que difere do paradigma do exercício”. Estas diferenças entre os paradigmas são confrontadas aos alunos nas atividades de investigação, como bem evidenciado na atividade extraída e adaptada de Nascimento e Quartieri (2020).

Como mencionado, um dos nossos propósitos, juntamente com o orientador, era explorar a investigação matemática com os alunos. Para isso, precisávamos de atividades que cumprissem tal necessidade. Segundo Braumann (2002, p. 21), “aprender Matemática passa necessariamente por uma faceta investigativa, que só se pode aprender fazendo investigação matemática (ao nível adequado para cada grau de ensino)”. Portanto, o processo de investigação como um todo é crucial para o conhecimento se concretizar.

FUNDAMENTAÇÃO

O estágio supervisionado é um momento muito importante para a construção docente. Passerini (2007) acredita que este oferece a oportunidade para os futuros professores articularem a teoria que estudaram com a prática no ambiente escolar, isto torna os licenciandos capazes de ter uma visão mais abrangente e crítica da educação. Pimenta e Lima citado por Passerini (2007) afirmam que o estágio ainda é muitas vezes uma atividade fragmentada, completamente distante da realidade escolar e limitada apenas a “mini-aulas”, o que compromete o potencial de formação do estágio.

Nesse contexto, o Promat se apresenta como uma proposta diferenciada. Mais do que uma sequência de intervenções pontuais, trata-se de um curso estruturado, que possibilita aos estagiários o planejamento e a aplicação de estratégias didáticas diversificadas. Por isso, entende-se que o estágio deve ser valorizado não apenas como um requisito obrigatório da licenciatura, mas como um espaço legítimo de experimentação, reflexão e construção de uma prática docente.

O processo de trabalhar investigação matemática, requer que estejamos preparados para situações e questionamentos inesperados durante a execução das atividades propostas. Skovsmose (2000) destaca que qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A alternativa não está em retornar à zona de conforto do paradigma do exercício, mas em ser apto para atuar no novo meio. Estes desafios nas práticas de sala de aula advêm da diferenciação dos paradigmas que estão relacionadas as “referências”, que busca incentivar os alunos a criarem significados para os conceitos e atividades matemáticas.

Aprender Matemática transcende a simples compreensão de conceitos matemáticos, é fundamental que os estudantes sejam oportunizados de investigar argumenta Braumann (2002). A autora compara este processo como andar de

bicicleta, não suficiente apenas assistir ou ouvir explicações, é necessário praticar. Incorporar pesquisas em todos os níveis, evidenciando a Matemática como ferramenta para entender o mundo é enfatizada por esta visão.

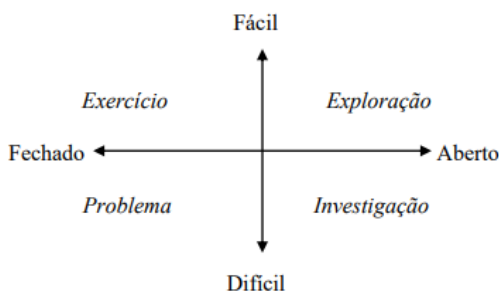
Ao refletir sobre a importância da investigação matemática no ensino, os Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) destacam aspectos essenciais desse trabalho, desde seu significado até a forma de planejar e conduzir as aulas: Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) complementam que

[...] o processo investigativo, em que os alunos se envolvem durante a fase de desenvolvimento da tarefa, compreende diversas etapas fundamentais. Primeiramente, tentam compreender a situação proposta, organizam os dados e formulam questões. Depois, fazem conjecturas, procuram testá-las e, em alguns casos, demonstrá-las.

Além desses aspectos, os autores ampliam a discussão, destacando a necessidade de reflexão docente, colaboração entre profissionais e projetos educativos que sustentem a investigação matemática como prática regular nas escolas.

Como diz Ponte (2002, p.4), o processo de ensino-aprendizagem da Matemática baseia-se na atividade que os estudantes ocorrem em sala de aula, e esta, por sua vez, é fortemente influenciada pelas atividades propostas pelo docente. A Matemática contém características nas atividades e são relativas à pessoa que aplica. Conforme o autor, uma tarefa possui quatro dimensões fundamentais: seu nível de dificuldade, sua organização, seu contexto de referência e o tempo necessário para sua solução. Como podemos verificar na imagem seguinte, que mostra os quadrantes dos diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura.

Figura 1: Os diversos tipos de tarefas



Fonte: PONTE, 2002, p.5

Frequentemente, não se faz a distinção entre tarefas de investigação e de exploração, referindo-se a todas elas como “investigações”. Isso ocorre,

provavelmente, porque é difícil determinar, desde o início, o nível de complexidade que uma tarefa aberta terá para um determinado grupo de estudantes.

A primeira atividade relatada neste artigo refere-se a uma adaptação do problema proposto por Amorim e Lima (2016), O conteúdo matemático polinômios abordados por meio do cálculo de área de quadrados e retângulos usando o material físico conhecido como *Algeplan*. Perceber a produção do conhecimento intimamente ligada ao diálogo entre aluno-aluno e aluno-professor é o objetivo desta atividade como sugere Freire (1987 citado por Amorim e Lima 2016). Amorim e Lima (2016, p. 10) acrescenta a tudo isso:

Esse tipo de atividade contribuiu também para a formação profissional porque mostra que alternativas para um ensino de matemática, como a abordagem dialógica e investigativa, podem ser bem recebidas por alunos da educação básica e promover sujeitos que constroem conhecimento, com um posicionamento crítico sobre o objeto de estudo.

No 8º encontro foi trabalhado o jogo-atividade “Meu e Teu” adaptado de Araujo (2004), este trazia cartas, peças e dados em que os alunos eram apresentados às dificuldades do processamento algébrico. Em uma pesquisa efetuada por Falcão (1996 citado por Araujo, 2004), com 481 sujeitos, sugeriu que as dificuldades dos alunos em trabalhar com álgebra não se restringem apenas à solução de problemas, mas também, ao processamento algébrico.

Amorim evidencia em seu trabalho que é essencial entender os desafios que podem surgir ao resolver problemas algébricos com enunciado. Identificar os erros e as dificuldades dos alunos nas atividades pode ajudar os professores a diagnosticar as questões subjacentes ao processo e a buscar novos métodos de ensino que permitam aos alunos aprender álgebra de forma mais significativa. Esse tipo de atividade, permite também uma abordagem mais construtiva, permitindo que o diálogo seja mais pertinente, justamente por surgirem dúvidas por parte dos alunos.

Segundo Bicudo (1993 *apud* Nascimento e Quartieri, 2020, p.135), pesquisar é buscar entender e interpretar de maneira significativa a questão proposta. O estudo em Educação Matemática contribui para a compreensão da Matemática, sua formação e seu significado para o mundo e para o suporte na ação político-pedagógica.

A última atividade adaptada de Nascimento e Quartieri (2020), traz um banco de questões com perguntas abertas sobre a modalidade de vendas de pneus, com estas questões, é induzido os alunos a buscarem como forma de pesquisa, respostas e conclusões próprias sobre o problema proposto

RELATO DA EXPERIÊNCIA E REFLEXÕES

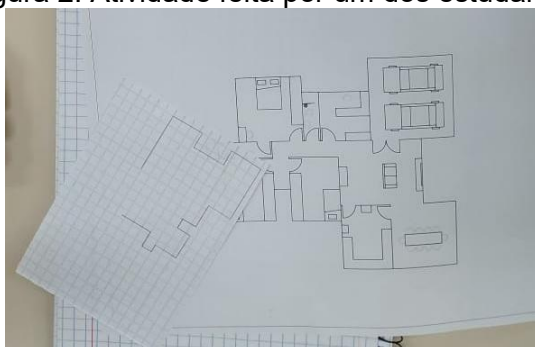
A realidade, é que para nós, trabalhar com a investigação matemática foi um grande desafio, e quanto mais nos permitimos, mais apreço adquirimos. Ao decorrer dos encontros, fomos nos familiarizando com a metodologia e vendo como ficaria quando aplicássemos aos conteúdos previstos. Bem como, os alunos estavam se adaptando com o estilo do programa e com a dinâmica de possuir três professores na turma.

Além disso, os alunos que atendíamos apresentavam diferentes níveis de escolaridade, o que tornou as aulas ainda mais desafiadoras e enriquecidas. Havia participantes da 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio e alguns alunos da graduação. Em média, participaram cerca de 20 estudantes por encontro, sendo que o número de alunos variou ao longo dos sábados, com registros de 24, 31, 35, 18, 24, 18, 16, 15, 14 e 12 participantes, sendo este último o menor público, no encontro final do Promat, o qual era um evento lúdico e comemorativo. Esses dados evidenciam que, mesmo com oscilações na frequência, houve boa participação dos cursistas, especialmente quando comparada a edições anteriores do programa.

Em relação aos conteúdos trabalhados, abordamos principalmente temas do Ensino Fundamental, Anos Finais, como operações básicas, conjuntos, frações e expressões algébricas, além de uma breve introdução ao tema de equações do 2º grau. Observamos que o foco central de nossas aulas foi a retomada de conceitos básicos e operações simples, pois esses conhecimentos eram constantemente requisitados nas resoluções dos exercícios e atividades propostas, o que evidenciou uma grande lacuna de conhecimento entre os estudantes.

Uma das primeiras atividades que abordamos com os estudantes e que foi muito acolhida por eles, foi acerca do conteúdo de razão e proporção. O interesse dos alunos foi despertando ao decorrer da execução da atividade e a forma como cada estudante manipulava e investigava, nos proporcionou grande satisfação. Conforme a imagem abaixo, podemos analisar o início da construção da resolução da atividade após os alunos investigarem a planta baixa fornecida.

Figura 2: Atividade feita por um dos estudantes



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Apesar de alguns alunos verificarem números decimais quando iam escolher a escala, observamos grande determinação em prosseguir com os cálculos para que a imagem fosse concluída. Percebemos que os processos investigativos, enunciados por Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) são presentes durante os desenvolvimentos da atividade.

A proposta da atividade, tirava os alunos da zona de conforto, mas não fornecia tanta abertura para divagar em questionamentos, por exemplo, e para as próximas atividades, nosso desejo era uma atividade com uma abertura mais significativa como Ponte (2002) retrata no trecho que mencionamos acima e que nos trouxe uma melhor compreensão para a abordagem com atividades investigativas.

Buscamos algumas referências, como, por exemplo, a de Amorim (2016) para trabalharmos com polinômios, um conteúdo frequentemente temido pelos estudantes; Araújo (2004); Nascimento, Quartieri (2020), conforme já mencionamos.

Sendo assim, a aplicação dos planos de aula, construídos, por meio das ideias dos autores, e formados a partir de uma série de atividades investigativas, era desafiadora e inovadora, e nem sempre conseguíamos seguir o roteiro à risca. Isso porque, como afirmam os autores, ao aplicarmos as aulas, percebemos que não bastava valorizar apenas o nosso querer: era essencial considerar os estudantes como sujeitos ativos no processo. Por mais que nos esforçássemos, o objetivo principal era garantir que eles conseguissem evoluir, sendo assim o nosso papel era de mediar essa construção de conhecimento.

Sem dúvidas, essa experiência no estágio foi transformadora. Ela nos permitiu perceber, na prática, aquilo que antes apenas imaginávamos nas salas de aula da universidade. Ao assumirmos o papel de professores, passamos a dar novo sentido ao que aprendemos como estudantes. Esse processo nos impactou profundamente e nos ensinou que o aprendizado é contínuo — e que o exercício da docência vai além do domínio de conteúdos, ele envolve escuta, adaptação, planejamento e sensibilidade.

Um momento marcante dessa experiência ocorreu no sétimo encontro, com a aplicação de uma atividade que conectava figuras geométricas, de certa forma, conhecidas pelos estudantes, como por exemplo, quadrados e retângulos, ao campo

da álgebra, somando o saber concreto ao saber abstrato. A atividade em questão, é atividade apresentada por Amorim (2016).

Essa atividade, usava o material conhecido como *Algeplan*, e teve grande importância para nossa formação, pois precisamos nos aprofundar nos conhecimentos prévios, pensar em estratégias que estimulassem a curiosidade dos alunos e estudar formas de mediar a aprendizagem de modo eficaz. Essa investigação levou ao ponto alto de nossas aulas, pois permitiu aos estudantes construir expressões algébricas a partir de representações geométricas, tornando o conteúdo mais significativo. A seguir apresentamos uma imagem do desenvolvimento desta atividade em aula:

Figura 3: Atividade com *Algeplan* feita pelos estudantes



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Neste momento teve muita participação dos estudantes, isto porque, já estavam habituados a investir as atividades propostas, e já tínhamos uma segurança maior na mediação da atividade e isso proporcionou uma comunicação melhor entre os estudantes e nós professores. Apesar disso, alguns alunos encontraram dificuldades no decorrer da atividade. Por exemplo, no instante que pedíamos para eles associarem os lados do quadrado ou retângulo com um valor não conhecido, não sabiam o que fazer, ou ainda, quando pedíamos para eles somarem as áreas das figuras considerando as medidas sendo x^2, y^2 e $x + y$. Esse obstáculo foi superado com retomadas de explicações centradas em conceitos anteriormente trabalhados.

Durante a atividade adaptada de Nascimento e Quartieri (2020), notamos que os alunos inicialmente tiveram dificuldade em externalizar a sua fonte de pesquisa além da sala de aula. Para o auxílio deste, usamos o acesso a internet, mostrando

que os resultados a serem buscados são além da semi-realidade. Ponte define esta tarefa trabalhada em sala como uma questão de investigação, pois mesmo sendo uma questão sobre função afim, o nível de desenvolvimento da sala eleva o seu nível de dificuldade.

Nesse sentido, enquanto um grupo apresentava desafios ao apresentar a relação da função encontrada com construção gráfica, outro grupo usou um computador que haviam trazido por conta para desenhar gráficos de forma eletrônica pela ferramenta *GeoGebra*. Pudemos notar que o uso de investigação matemática como metodologia de ensino traz o ensino de forma qualitativa e significativa. Freire (2011) *apud* Nascimento e Quartieri (2020, p.143) afirma que “nas condições de verdadeira aprendizagem os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo”.

Nesse contexto, a metodologia da investigação matemática ganha destaque. Apesar de ainda ser pouco utilizada nas escolas, ela se mostra extremamente eficaz para a construção significativa do conhecimento. Trata-se de uma abordagem que exige mais preparação por parte do professor, pois ele deve planejar cuidadosamente as “tarefas de investigação” escolhidas, prever possíveis caminhos de solução e estar pronto para mediar os processos de aprendizagem. Nessa metodologia, o aluno torna-se protagonista, construindo seu próprio saber por meio da exploração e da formulação de hipóteses, enquanto o professor atua como orientador dessa jornada.

Comparada à metodologia tradicional, a abordagem investigativa oferece vantagens notáveis, especialmente no desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico dos estudantes. Conseguimos observar esta diferença no decorrer de nossas aulas, pois no início de nosso estágio não tínhamos um guia, e não nos embasamos na investigação, dando lado a maneira tradicional de ensinar. Com isso, obtivemos alguns resultados, mas os cenários em que a investigação esteve presente, verificamos que os estudantes estavam determinados a participar, a perguntar, a descobrir e compreender as instruções para chegar a um conhecimento abrangente. Vejamos o que Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), defendem:

Na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na actividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa.

Ainda que, no início, cause certo estranhamento — tanto para os alunos quanto para os professores —, com o tempo os resultados tornam-se visíveis: há maior engajamento, parece haver mais retenção do conteúdo e sentido atribuído ao conhecimento. Além disso, essa metodologia também contribui para a formação docente, pois nos coloca diante de novos desafios e nos abre a possibilidades de aprendizagem junto com os estudantes.

Assim, a prática investigativa vivenciada no estágio revelou-se uma ferramenta poderosa tanto para o ensino quanto para o crescimento profissional. Ao adotarmos uma postura mais aberta, reflexiva e colaborativa, percebemos que o conhecimento não é unilateral. Pelo contrário, os alunos também nos ensinam com suas dúvidas, soluções e formas de pensar, enriquecendo a experiência educativa e tornando-a mais dinâmica e significativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de tudo que foi vivenciado no Promat, podemos concluir que essa experiência, de certa forma, transformou nossa visão como professores. Conseguimos visualizar a importância de buscar alternativas para enriquecer a nossa prática docente, e como a investigação matemática pode contribuir nesse contexto. Pudemos evidenciar o quanto é importante acreditar no potencial de nossos estudantes e construir, junto a eles, uma concepção livre de estereótipos em relação ao saber matemático, mas também identificar que essa tarefa é desafiadora e requer muita dedicação e paciência. Também evidenciamos que esta pressão — quanto a lidar com a quebra de estereótipos — é ainda maior quando ministramos aulas em grupo, pois considerar as limitações e potencialidades dos colegas, adaptar-se a diferentes modos de pensar, dividir tarefas e discutir ideias é um processo árduo, que muitas vezes pode gerar conflitos e causar certo desconforto entre os participantes.

A aplicação de metodologias investigativas transformou a dinâmica das aulas e ampliou nossa visão sobre o ensino de Matemática. A presença de cenários de investigação como diz Skovsmose (2000), não só envolveu os alunos de maneira mais ativa, como também nos instigou a assumir uma postura mediadora, aberta ao diálogo e ao inesperado. Vivenciamos que ensinar não se trata de apenas transmitir conteúdos, mas de criar condições para que estudantes explorem, questionem e construam conhecimento.

Embora, cercados desafios, esse primeiro contato com a sala de aula proporcionou um sentimento de satisfação, gratidão e sucesso. Percebemos o quanto os alunos se inspiram com nossa atuação e se esforçam para conseguir contribuir positivamente em nossa formação. Alguns alunos expressaram sua gratidão por todo aprendizado e experiências que trocamos.

REFERÊNCIAS

AMORIM, M. V. dos S.; LIMA, L. F. de. Abordagem Dialógica e investigativa: uma possibilidade de trabalho com polinômios. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-11. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7151_3564_ID.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2025.

BRAUMANN, C. A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P. da Costa, C. ROSENDO, A. I. MAIA, E. FIQUEIREDO, N. DIONÍSIO, A. F. **Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002, p. 5-24. Disponível em: <https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf>. Acesso em 31 jul. 2025.

FONSECA, H. BRUNHEIRA, L. PONTE, J. P. da. As Actividades de Investigação, o Professor e a Aula de Matemática. In: **Atas do ProfMat 99**. Portimão, 1999, p. 1-13. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/254647012_As_actividades_de_investigacao_o_professor_e_a_aula_de_Matematica>. Acesso em 31 jul. 2025.

HUBERMAN, M. *et al.* O ciclo de vida profissional dos professores. In: NÓVOA, A. **Vidas de professores**. Porto: Porto, 1992. p. 31-61.

NASCIMENTO, R. A. do; QUARTIERI, M. T. Investigação Matemática: possibilidade para o ensino de função do 1º grau. In: **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 2, 2020, p. 133–144. Disponível em: <<https://jjeem.pgsscogna.com.br/jjeem/article/view/7036/5560>>. Acesso em: 31 jul. 2025.

PASSERINI, G. A. O estágio supervisionado na formação inicial do professor de matemática na ótica de estudantes do curso de licenciatura em matemática da UEL. 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. p. 24-25.

PONTE, J. P. M. da. Investigar, ensinar e aprender. In: Actas do ProfMat 2003. Lisboa, 2002, pp. 25-39. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%20Aprender.pdf>>. Acesso em: 31 jul. 2025.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, 2000, p. 66–91. Disponível em: <<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>>. Acesso em: 31 jul. 2025.

PROMAT

A tabela a seguir mostra o cronograma e os conteúdos desenvolvidos em cada encontro. Em seguida, apresentamos os planos de aula de cada um dos encontros, seguidos de seus respectivos relatórios.

Encontro	Data	Conceitos
01		Avaliação Diagnóstica
02		Conjuntos Numéricos e Expressões
03		Frações, Decimais e Porcentagem
04		Razão, Proporção e Regra de Três
05		Polígonos e Poliedros
06		Triângulos
07		Expressões Algébricas
08		Equação de 1º e 2º Grau
09		Função de 1º Grau e Gráficos
10		Gincana e Encerramento

AULA 01 (10/05/2025) – PLANO DE AULA

Plano de aula – Show do Milhão – 10/05/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Capacitar os alunos quanto a compreensão e aplicação dos conceitos de números.

Objetivos específicos:

- Considerar qual o nível de dificuldade dos alunos em conteúdos básicos de matemática;
- Avaliar a capacidade cognitiva e o raciocínio lógico individualmente;
- Estimar a proatividade e reatividade do aluno.

Conteúdo: Conhecimentos básicos sobre matemática; números e expressões.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente, iremos nos apresentar, e passar informações gerais sobre os horários. Em seguida entregaremos o Questionário 01 com as seguintes perguntas:

Qual seu nome?	Qual sua cidade?	Qual sua idade?	Por quê está no Promat?
-----------------------	-------------------------	------------------------	--------------------------------

Após todos responderem às perguntas vamos recolhendo todos os questionários. O objeto é reunir dados dos alunos para que no próximo encontro os utilizemos como recurso para introduzir o conteúdo de conjuntos.

(10 minutos)

Em seguida iremos elaborar uma avaliação formativa utilizando um material disponibilizado pelo Laboratório de Ensino da Matemática (LEM), o jogo “Show do Milhão”. A avaliação em questão trata-se de perguntas do Ensino Fundamental relacionadas a diversas áreas do conhecimento matemático.

Sendo assim, iremos ter uma prévia de como trabalharemos nos próximos encontros. É essencial analisarmos o conhecimento prévio dos alunos para que possamos suprir as dificuldades e desafios. Para esta avaliação usaremos o jogo chamado “Show do Milhão”.

Show do Milhão:

O jogo Show do Milhão terá 40 questões de múltipla escolha e com conteúdos variados sobre matemática. Com isso, iremos identificar com quais ideias os alunos possuem afinidade e com quais eles possuem mais dificuldade.

Conforme o Anexo 01, as questões abordam conteúdos como: potenciação, regra de três, geometria, frações, conjuntos, proporção, números primos, matriz, geometria espacial, equação do segundo grau, trigonometria e lógica.

O jogo será apresentado aos participantes, repassando as suas regras, tempo de execução e demais informações. A atividade ocorrerá até depois do intervalo.

Serão formado cinco grupos de alunos com oito integrantes; serão entregues para cada participante quatro placas com letras de A à D. A cada rodada, um aluno será selecionado dentro do grupo para ir à frente responder; ele deverá se apresentar com seu nome e, em seguida, responder à questão. Quando for dita a questão, ele terá um minuto para responder. Seus colegas podem levantar as placas para auxiliá-lo em sua decisão. Caso o estudante não consiga responder a tempo, os outros grupos poderão responder, o grupo em que todos os integrantes levantarem as placas primeiro ganha o ponto.

Durante a contagem de tempo, o participante pode pedir até três ajudas. Ligar para alguém: O grupo pode fazer uma ligação para um conhecido para ajudá-los a responder à questão. Pular a questão: O participante pode escolher devolver a questão e sortear outra. Ler a questão novamente: será pausado o tempo e será lida a questão uma segunda vez. Cada ajuda pode ser usada somente uma vez por cada grupo.

Terminando todas as 40 questões, o grupo com maior número de acertos ganha.

(2 horas e 20 minutos)

INTERVALO

Após o intervalo iremos prosseguir com o jogo do milhão e sua finalização anunciando a equipe/grupo ganhador, logo após, realizaremos a etapa final, com a ajuda de outro jogo.

Jogo do quatro quatros:

Ademais, iremos trabalhar de forma indireta as expressões por meio do jogo quatro quatros. O jogo em questão, também emprestado do LEM¹, propõe que os participantes se sentem novamente em suas carteiras de forma individual para jogarem. Assim que se organizarem, explicaremos o objetivo do jogo, que consiste em formar números inteiros (0 a 10) usando apenas quatro algarismos quatro e as quatro operações aritméticas elementares.

Por fim, será entregue aos discentes a lista de exercícios, composta por problemas do ENEM² e vestibulares, que utilizam os tópicos de todos os conteúdos que trabalharemos. Essa lista pode ser levada para casa e iremos enviar a resolução dos exercícios o decorrer da semana no grupo criado pelo *WhatsApp*³.

Avaliação:

A avaliação será feita inicialmente considerando o rendimento do grupo. Anotaremos as questões que os grupos erraram ou deixaram de responder a tempo. Estas perguntas serão tópicos relevantes para serem abordados durante todo o curso como base para retomada de conhecimentos ao explorar um conteúdo que necessita desse conhecimento prévio.

¹ LEM: Laboratório de Ensino de Matemática.

² ENEM: Exame nacional do Ensino Médio.

³ Whatsapp: Aplicativo de mensagens muito popular, amplamente utilizado pelos participantes do Promat.

Em um segundo momento, serão recolhidas as respostas do quatro quatros para avaliarmos a capacidade de cada aluno em seu raciocínio lógico e aritmético, de forma individual.

Como momento final, a lista de exercícios será proposta para ser solucionada em casa, e será avaliada com o decorrer das interações sociais dos alunos com os seus pares e com seus professores.

Apêndice A:

Tabela 1: Questionário 01

Questionário
Qual seu nome?
Qual sua idade?
Qual sua cidade?
Qual o estilo musical que mais se aproxima do que você gosta?
<input type="checkbox"/> Rock
<input type="checkbox"/> Sertanejo
<input type="checkbox"/> Funk
<input type="checkbox"/> Pop
Por que está no Promat?
<input type="checkbox"/> Porque quer aprender mais.
<input type="checkbox"/> Porque gosta.
<input type="checkbox"/> Porque quer passar no vestibular.
<input type="checkbox"/> Porque quer aumentar a nota no ENEM.
Outro:
Qual seu telefone?

Fonte: Acervo dos autores, 2025

Anexo 01:

QUESTÕES DO "SHOW DO MILHÃO"

- 1) 4 está para 3, assim como 12 está para x, qual o valor de x:
a. 9 **b. 7** **c. 4** **d. 3**
- 2) $(2^3)^2$ é o mesmo que:
a. 51 **b. 54** **c. 64** **d. 44**
- 3) Qual dessas figuras geométricas não encontramos em nossa Bandeira Nacional?
a. Retângulo **b. Círculo** **c. Triângulo** **d. Losango**
- 4) Dentre os números, qual é o divisor de 99?
a. 11 **b. 12** **c. 13** **d. 8**
- 5) Dois quartos de hora correspondem a quantos minutos?
a. Trinta **b. Quinze** **c. Quarenta** **d. Dez**
- 6) Como se chamam duas retas que nunca se encontram?

a. **b. Paralelas** c. Diagonais d. Oblíquas
Perpendiculares

7) Todos os números divisíveis por 1 e por ele mesmo são chamados de:

a. Pares b. Parentes c. Parecidos d. Primos

8) Quantos números divisíveis por 2 existem de 1 a 100?

a. 2 b. 25 c. 50 d. 100

9) A fórmula da resolução de equações do 2º grau recebe o nome de qual matemático indiano?

a. Gandhi b. Bhaskara c. Al-Khowarizmo d. Pitágoras
Akaria

10) O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se:

a. Bissetriz b. Cateto c. Mediatriz d. Hipotenusa

11) Maria nasceu quando João tinha 4 anos, depois de 17 anos, qual a diferença de idade entre os dois?

a. 13 b. 21 c. 17 d. 4

12) Como são chamados os ângulos cuja soma totaliza 360 graus?

a. Replementares b. Suplementares c. Complementares d. Congruentes

13) Qual o nome da reta que divide um ângulo em outros dois ângulos iguais?

a. Mediana b. Bissetriz c. Mediatriz d. Altura

14) Que conjunto numérico resulta da intersecção do conjunto dos números Reais com o conjunto dos números Racionais:

a. Naturais b. Inteiros c. Racionais d. Reais

15) Qual o único número par que também é primo?

a. 4 b. 6 c. 8 d. 2

16) O paralelogramo que tem somente quatro ângulos retos é um...

a. Losango b. Retângulo c. Quadrado d. Trapézio

17) Como se chamam as retas que se cruzam sem formar um ângulo reto?

a. Paralelas b. Perpendiculares c. Concorrentes d. Congruentes

18) Um quadrado com perímetro de 36 metros possui lados de:

a. 9 metros b. 6 metros c. 4 metros d. 10 metros

19) Do nascimento até 5 anos uma criança cresceu em média 8cm por ano. Se ela nasceu com 48cm, aos 5 anos ela tem?

- 34) Um suco e um pastel custaram R\$ 10,00. Dois sucos e um pastel custaram R\$ 14,00. Qual é o preço de um pastel?
- a. R\$ 10,00 b. R\$ 6,00 c. R\$ 8,00 d. R\$ 4,00
- 35) Que número é divisor de todos os números naturais?
- a. 0 b. 2 c. 10 d. 1
- 36) Que número é considerado elemento neutro na multiplicação?
- a. (-1) b. 0 c. 1 d. 10
- 37) Em que conta obtemos como resultado um número inteiro?
- a. Raiz quadrada de 5 b. Raiz cúbica de -27
c. Três elevado a meio d. Dois elevado a -1
- 38) Minhas aulas começam a sete e terminam as treze. Se tenho 30 minutos de recreio, quantas horas de aula eu tenho?
- a. 4,5 b. 5 c. 5,5 d. 6
- 39) Que conjunto numérico resulta da união do conjunto dos números reais com o conjunto dos números naturais?
- a. Naturais b. Inteiros c. Racionais d. Reais
- 40) Numa sala têm quatro gatos, cada canto tem um gato, cada gato vê três gatos. Quantos gatos existem na sala:
- a. 12 b. 1 c. 4 d. 16

Anexo 02

Lista de exercícios 01 Promat – 10/05/2025

1. (ENEM 2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1.

Efetuada os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135

b) 126

c) 118

d) 114

e) 110

2. (ENEM 2016) Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}$

c) $\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{8}$

e) $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}$

3. (ENEM 2004) Já são comercializados no Brasil veículos com motores que podem funcionar com o chamado combustível flexível, ou seja, com gasolina ou álcool em qualquer proporção. Uma orientação prática para o abastecimento mais econômico é que o motorista multiplique o preço do litro da gasolina por 0,7 e compare o resultado com o preço do litro de álcool. Se for maior, deve optar pelo álcool. A razão dessa orientação deve-se ao fato de que, em média, se com um certo volume de álcool o veículo roda dez quilômetros, com igual volume de gasolina rodaria cerca de

a) 7km

b) 10km

c) 14km

d) 17km

e) 20km

4. (UNIFENAS 2016) Qual é o número de diagonais que passam pelo centro de um undecágono (polígono de 11 lados) regular?

a) 44.

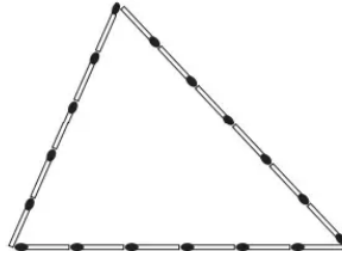
b) 30.

c) 20.

d) 10.

e) Nenhuma

5. (ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos.



A figura ilustra um triângulo construído com essas características. A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

- a) **3** b) **5** c) **6** d) **8** e) **10**

6. (FGV-SP 2015) Sendo x , y e z números reais tais que $\frac{y}{z} = 7$ e $\frac{x}{y} = 3$, o valor de $\frac{x-y}{y-z}$ é igual a:

- a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{7}{3}$

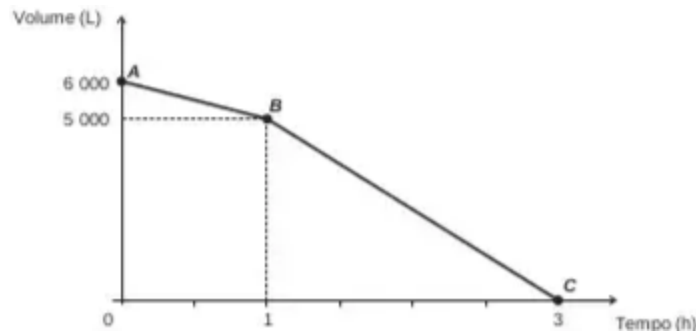
7. (ENEM PPL 2022) A meta de uma concessionária de automóveis é vender, pelo menos, 104 carros por mês. Sabe-se que, em média, em dias em que não são oferecidos descontos, são vendidos 3 carros por dia; em dias em que há o desconto mínimo, são vendidos 4 carros por dia; e, em dias em que há o desconto máximo, são vendidos 5 carros por dia.

No mês atual, até o fim do expediente do sexto dia em que a concessionária abriu, não foram oferecidos descontos, tendo sido vendidos 18 carros, conforme indicava a média. Ela ainda abrirá por mais 20 dias neste mês.

A menor quantidade de dias em que será necessário oferecer o desconto máximo, de modo que ainda seja possível a concessionária alcançar sua meta de vendas para o mês, é

- a) **6** b) **10** c) **11** d) **13** e) **18**

8. (ENEM 2016) Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

- a) 1000 b) 1250 c) 1500 d) 2000 e) 2500

Relatório da aula ministrada - 10/05/2025

No dia 10 de maio de 2025, foi realizado o primeiro de dez encontros do Promat. Chegamos alguns minutos antes do início da aula para organizar os materiais, discutir alguns acordos finais, repassar o encaminhamento parcial e definir a distribuição das atividades e apresentações.

Nesse encontro inicial, contamos com a presença de 24 estudantes, que foram recepcionados. Assim que todos se acomodaram, por volta das 8h05min, iniciamos as atividades. Desejamos as boas-vindas a todos e, em seguida, nos apresentamos. Logo após, entregamos um questionário, solicitando que fosse respondido e devolvido ao final.

Ao entregarmos os formulários, incentivamos os alunos a encontrar um erro de português presente na folha. A pessoa que teve a iniciativa de comunicar o erro recebeu como brinde um chocolate *Kit Kat*, reforçamos a importância da atenção, colaboração e reconhecendo que todos estamos sujeitos a pequenos erros. Em seguida, recolhemos os formulários, cujos dados serão organizados e tabulados posteriormente.

Após o recolhimento dos questionários, explicamos o jogo “Show do Milhão”. Os participantes foram divididos em grupos identificados por cores e convidados a responder questões de múltipla escolha sobre conhecimentos gerais de matemática do ensino fundamental. Nas três primeiras rodadas, os alunos demonstraram receio em participar em grupo, não utilizavam as ajudas disponíveis nem se apoiavam na

cooperação mútua. Ainda assim, os integrantes que respondiam mostravam-se seguros quanto às respostas. Já nas últimas quatro rodadas, os grupos tornaram-se mais competitivos, demonstraram maior atenção e passaram a solicitar explicações para as dúvidas que surgiam.

O tempo dessa dinâmica foi uma preocupação inicialmente, mas ao decorrer do encontro nós conseguimos organizar bem, principalmente pelo motivo dos alunos terem engajado bem. Avaliamos positivamente o desenvolvimento da atividade e acreditamos ter alcançado os objetivos propostos com a dinâmica. Identificamos, entre os temas abordados, que as maiores dificuldades se concentraram nas questões de geometria plana e espacial, bem como em conjuntos e matrizes.

Após a conclusão do “Show do Milhão”, explicamos a segunda e última atividade: o jogo dos “quatro quatros” (Tahan, 1999). Para essa atividade, os estudantes foram orientados a trabalharem individualmente, resolvendo os desafios em um rascunho. Ao se organizarem e iniciarem a resolução, houve um momento de silêncio marcante na sala, o que inicialmente nos causou certo desconforto. No entanto, conseguimos esclarecer dúvidas e auxiliar individualmente cada estudante em suas carteiras. Observamos um bom desempenho geral, e a atividade gerou participação ativa na resolução no quadro.

Durante o encontro, realizamos várias explicações sobre os conteúdos das questões. Com isso, enquanto um de nós explicava, os outros professores ficavam atentos em dúvidas particulares dos alunos, se a explicação estava coerente e contribuía caso necessário. A contribuição que cada professor fez para o outro foi muito útil e necessária.

Finalizamos o encontro com a entrega de uma lista de exercícios composta por oito questões, relacionadas aos conteúdos que serão abordados nos próximos encontros. Os exercícios foram selecionados com base em edições anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares. Agradecemos a presença e a atenção de todos, reforçando o convite para o próximo encontro, desejando um bom final de semana a todos.

Nossa atuação foi boa. Apesar do medo e da insegurança no começo, após algum tempo começamos a lidar melhor com o andamento das atividades. O que funcionou foi a nossa primeira dinâmica, o “Show do Milhão”, que, embora tenha tido receio tanto dos alunos quanto de nós no início, depois fluiu bem e teve um bom desenvolvimento. O que não funcionou foi a mudança na disposição dos alunos para

a próxima atividade, o jogo dos “quatro quatros”. Talvez tivéssemos que deixá-los em grupo mesmo, pois essa mudança causou certo desconforto. O que faríamos diferente seria estruturar mais as perguntas do Show do Milhão para melhor organização e não separar os grupos para a próxima dinâmica, a fim de manter o clima de interação entre eles.

AULA 02 (17/05/2025) – PLANO DE AULA

Plano de Aula – Conjunto e Expressões – 17/05/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Capacitar os alunos quanto a compreensão e aplicação dos conceitos de conjuntos.

Objetivos específicos:

- Identificar e nomear conjuntos numéricos notáveis, como os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
- Compreender e aplicar os símbolos e a linguagem da Teoria dos Conjuntos.
- Representar conjuntos por meio de descrição, extensão e propriedades.
- Interpretar e construir diagramas de Venn como ferramenta de visualização e análise de relações entre conjuntos.
- Relacionar informações pessoais e características do grupo a conceitos de agrupamento e conjuntos, desenvolvendo raciocínio lógico e contextualização.

Conteúdo: Conjuntos e expressões.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, materiais para dinâmica, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula perguntando sobre o desenvolvimento da lista de exercícios da aula anterior, tiraremos as dúvidas e resolveremos até duas das oito questões presentes na lista conforme solicitadas.

(30 minutos)

Iniciaremos ao conteúdo desta aula apresentando uma tabela na qual expusemos com as respostas do Questionário 01, da aula anterior. Pediremos aos alunos quais suas opiniões sobre os resultados. Faremos perguntas como por exemplo: “Se os grupos de pessoas que gostam de rock e gostam de sertanejo se juntassem, seria somente somar a quantidade de pessoas?”, “Se selecionássemos somente os alunos que gostam de pop e tem 16 anos, esse grupo seria maior ou menor?”. Assim, conforme tivermos as respostas iremos direcionar o raciocínio para o conteúdo de conjuntos.

(15 minutos)

Montaremos no quadro grupos, divididos por idade, dos alunos seguindo as definições algébricas de conjunto. Em seguida, pediremos para que se agrupem conforme os grupos do quadro.

Tabela 2: Exemplo de separação dos grupos

16 anos {João, Maria, José}	17 anos {Larissa B, Larissa C, Larissa K}	outros {Pedro}
--------------------------------	---	-------------------

Fonte: Elaborado pelos autores.

(10 minutos)

Em seguida apresentaremos nos *slides* os seguintes conceitos:

Conceitos:

Um **conjunto** é uma coleção qualquer de objetos. Conjunto é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Representamos um conjunto colocando seus elementos entre chaves, separados por vírgula e usamos letras maiúsculas do alfabeto para denominá-los. Por exemplo:

- Conjunto dos números pares entre 5 e 13: {6, 8, 10, 12};
- Conjunto dos estados brasileiros da região Sul do Brasil: {Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}.

Elemento é cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto e são identificados por letras minúsculas. Como descrever:

- Entre chaves - conjunto das vogais $V = \{a, e, i, o, u\}$;
 - Por propriedade – $A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } P\}$ - $\{x \mid x \text{ é divisor inteiro de } 3\}$
- é uma maneira de indicar o conjunto: {1, -1, 3, -3}.

Conjuntos especiais:

- **Conjunto vazio:** Não possui elementos;

Exemplo: $B = \{x|x \text{ é um número primo par maior que } 5\}$

Notação: $B = \emptyset$ ou $B = \{\}$.

- **Conjunto universo:** Contém todos os elementos possíveis de interesse.

Exemplo: Para estudar a faixa salarial de empregados, precisamos conhecer o universo que estamos pesquisando, ou seja, o conjunto ao qual os empregados pertencem. Nesse caso, o conjunto universo pode ser, por exemplo, o dos funcionários da empresa A.

- **Conjunto unitário:** Possui exatamente um elemento.

Exemplo: $C = \{x|x \text{ é um número primo par}\}$

Sobre **pertinência entre elemento e conjunto:**

- Sejam A um conjunto e x um elemento, se x pertence ao conjunto A, escrevemos: $x \in A$ e para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos: $x \notin A$.

Um conjunto A é **subconjunto** de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.

Igualdade: Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

(25 minutos)

Seguiremos com exercícios de reforço para os alunos desenvolverem o conhecimento:

1. Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$:

a) Escreva com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

i) 3 é elemento de A

iv) $B = A$ é igual a A

ii) 1 não está em B

v) 4 pertence a B

iii) B é parte de A

b) Classifique as sentenças anteriores em falsas ou verdadeiras.

Resolução:

$3 \in A$ é verdadeiro

$B = A$ é falso

$1 \notin B$ é verdadeiro

$4 \in B$ é verdadeiro

$B \subset A$ é verdadeiro

(20 minutos)

INTERVALO

Começaremos pedindo para os alunos montarem novos grupos seguindo uma similaridade do questionário com grupos entre 3 e 5 pessoas.

(10 minutos)

Exporemos aos alunos sobre união, diferença, igualdade e interseção.

União: Dados dois conjuntos A e B, chama-se união de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Diferença: Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Interseção: Dados dois conjuntos A e B, chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

(15 minutos)

Seguiremos com exercícios de reforço para os alunos desenvolverem o conhecimento:

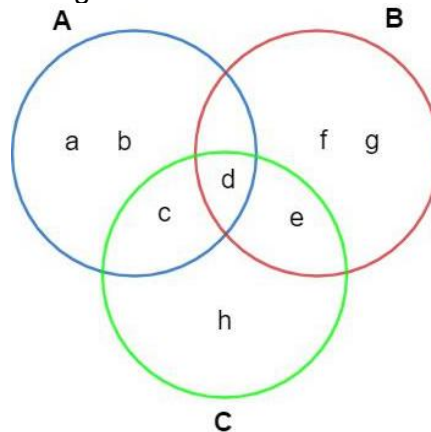
1. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determine $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.
2. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, descreva $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

(20 minutos)

Transmitiremos sobre conjuntos numéricos notáveis com auxílio de um diagrama de Venn.

O **Diagrama de Venn** consiste em uma linha fechada (que não se entrelaça) na qual “colocamos” os elementos do conjunto em questão, logo, podemos representar um ou vários conjuntos de maneira simultânea. Como a imagem exemplo:

Figura 4: Diagrama de Venn com três conjuntos.



Fonte: BRASILESCOLA, 2019.

Conjunto dos números naturais: Chama-se conjunto dos números naturais, o conjunto formado pelos números inteiros positivos.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros: Chama-se conjunto dos números inteiros, o conjunto formado pelos números inteiros positivos e negativos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números racionais: Chama-se conjunto dos números racionais o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -\frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{5}{3}, \dots\}$$

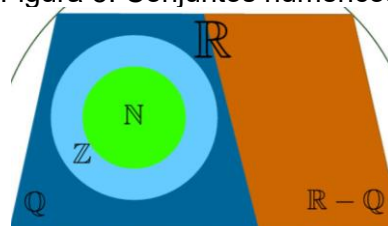
Conjunto dos números irracionais: Chama-se conjunto dos números irracionais o conjunto que inclui números que não podem ser escritos como frações exatas, pois possuem infinitas casas decimais não periódicas.

$$I = \{\dots, \sqrt{2}, \dots, \pi, \dots\}$$

Conjunto dos números reais: Chama-se conjunto dos números reais o conjunto formado por todos os números racionais e irracionais, ou seja, todos os números que podem ser representados em uma reta numérica.

$$\mathbb{R} = \{\dots, -\frac{1}{15}, \dots, 1, \dots, \sqrt{2}, \dots, \pi, \dots, 100, \dots\}$$

Figura 5: Conjuntos numéricos.



Fonte: BRASILESCOLA, 2016.

(15 minutos)

Introduziremos uma dinâmica-jogo chamado **Caça aos Conjuntos**.

Nesta dinâmica, os alunos serão organizados em grupos e receberão um Diagrama de Venn de 3 conjuntos, o qual vão usar para classificar os elementos dos conjuntos. Pelo ambiente da sala, estarão espalhados 15 QR Codes, cada um contendo uma pista que resultará em um número que faz parte de um, mais de um ou nenhum conjunto.

Os alunos deverão escanear os QR Codes com seus celulares, ler a pista, resolvê-la e, com base nos resultados encontrados desvendarem os conjuntos do diagrama de Venn (números pares, primos e múltiplos de 3), e assim, identificar a quais conjuntos esse número pertence. Os alunos precisaram prestar muita atenção para conseguirem assimilar os conjuntos e seus elementos, assim como, perceber que existem elementos fora dos conjuntos.

A cada nova pista encontrada, o grupo deverá:

- Descobrir pistas sobre a propriedade qual cada conjunto é formado;
- Classificar corretamente o número;
- Posicionar no diagrama de Venn;
- Discutir possíveis divergências e revisar conceitos, com apoio dos professores circulando pela sala.

Ao final da atividade, os grupos apresentarão suas classificações, e será realizada uma correção coletiva com ênfase nas regiões de interseção entre conjuntos.

(35 minutos)

Avaliação:

Os estudantes serão avaliados pela sua participação nas dinâmicas e resultados das questões feitas em sala.

Lista de exercícios:

Lista de exercícios para ser resolvida em casa:

1. (PUC-Adaptado) Se, $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ então os números inteiros que estão em $(B - A)$ são:

- a) -1 e 0 b) 1 e 0 c) 4 e 5 d) 3, 4 e 5 e) 0, 1, 2 e 3

Resolução: $B - A$ é remover de B todos os elementos presentes em A , então os elementos que sobram em $(B - A) = \{4, 5\}$. Portanto a resposta é c.

2. Identifique o conjunto numérico mais adequado para representar cada situação.
- a) O número de uma casa. *Resolução:* \mathbb{N} .
 - b) A temperatura de uma substância. *Resolução:* \mathbb{Q} .
 - c) Um andar de um prédio. *Resolução:* \mathbb{Z} .
 - d) A altura de uma pessoa, em metro. *Resolução:* \mathbb{Q} .
 - e) O grau de uma lente de óculos. *Resolução:* \mathbb{Q} .
 - f) A massa de um ovo. *Resolução:* \mathbb{Q}_+
3. (ENEM) Em relação aos principais conjuntos numéricos, é CORRETO afirmar que:
- a) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
 - b) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
 - c) Todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.
 - d) Todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.
 - e) Todo número irracional é real.

Resolução: Analisando o diagrama dos conjuntos numéricos, podemos notar que todo número natural é inteiro, racional e real. Então a resposta a, b e c são falsas. Todo número inteiro é racional, logo a resposta d é falsa. Os números reais é a união dos racionais e os irracionais, então todo número irracional é real. Portanto somente a e é verdadeira.

4. (UERJ) Em uma escola circulam dois jornais: Correio do Grêmio e O Estudante. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:
- 10% não leem esses jornais;
 - 520 leem o jornal O Estudante;
 - 440 leem o jornal Correio do Grêmio.
- Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

- a) 201
- b) 202
- c) 203
- d) 204
- e) 205

Resolução: 840 alunos no total, começamos subtraindo os não leitores, $840 - 10\% = 756$, destes 756, podemos encontrar o resultado da intersecção com a fórmula:

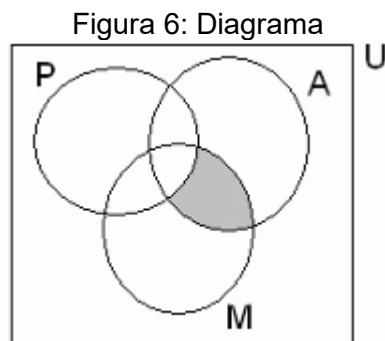
$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

$$756 = 520 + 440 - A \cap B$$

$$A \cap B = 204$$

A resposta da questão é c) 204.

5. (ENEM-Adaptado) Em um voo proveniente de Miami, a Anvisa constatou que entre todas as pessoas a bordo (passageiros e tripulantes) algumas haviam passado pela cidade do México.



No diagrama, U representa o conjunto das pessoas que estavam nesse voo; P o conjunto dos passageiros; M o conjunto das pessoas que haviam passado pela cidade do México e A o conjunto das pessoas com sintomas da gripe influenza A. Considerando verdadeiro esse diagrama, conclui-se que a região sombreada representa o conjunto das pessoas que, de modo inequívoco, são aquelas caracterizadas como:

- a) passageiros com sintomas da gripe que não passaram pela cidade do México.
- b) passageiros com sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.
- c) tripulantes com sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.
- d) tripulantes com sintomas da gripe que não passaram pela cidade do México.
- e) tripulantes sem sintomas da gripe que passaram pela cidade do México.

Resolução: Analisando o texto, podemos ver que a parte cinza é a união entre as pessoas com sintomas e as pessoas que passaram pelo México, mas que não são passageiros. Portanto a resposta é a c.

Relatório da aula ministrada – 17/05/2025

No dia 17 de maio de 2025, foi realizado o segundo encontro do Promat, conduzido pelos estagiários participantes do programa. Neste encontro, contamos com a presença de 33 estudantes.

Antes da chegada dos alunos, organizamos a sala de aula, agrupando as carteiras em conjuntos de cinco. Em seguida, distribuímos pela sala os QR Codes referentes ao jogo "Caça aos Conjuntos", que seria utilizado durante a dinâmica.

Com a presença confirmada de 33 alunos, iniciamos a aula com uma breve explicação sobre os objetivos e a proposta do Promat. Solicitamos que os alunos se apresentassem, mas a maioria optou por não se manifestar nesse momento.

Demos início à correção da lista de exercícios entregue na aula anterior. A resolução foi realizada no quadro, porém nenhum estudante manifestou dúvidas durante essa etapa. Em seguida, apresentamos os resultados do questionário aplicado na aula anterior e propusemos uma discussão com os alunos sobre os dados obtidos.

Logo após, organizamos uma dinâmica de separação dos estudantes por faixas etárias. Com os grupos formados, iniciamos a exposição dos conteúdos teóricos por meio de slides, abordando os conceitos de conjunto, elemento, subconjuntos e igualdade de conjuntos. Após a explanação, foi concedido um tempo de dez minutos para que os estudantes resolvessem exercícios relacionados ao conteúdo. Durante essa atividade, surgiram dúvidas pontuais, principalmente sobre o conceito de pertinência, que foram esclarecidas com a participação ativa dos alunos.

Após o intervalo, realizamos a correção dos exercícios e demos continuidade aos conteúdos, apresentando os conceitos de união, interseção e diferença de conjuntos. Introduzimos o uso do diagrama de Venn para representar essas operações, e os alunos realizaram exercícios práticos, que foram corrigidos em seguida.

Encerramos a aula com uma introdução aos conjuntos numéricos, utilizando exemplos e representações em diagramas de Venn para ilustrar as relações entre os conjuntos apresentados.

Durante a aula, alguns slides apresentaram erros conceituais e de digitação, o que dificultou a exposição de determinados conteúdos. Houve também certa confusão por parte dos estagiários ao escrever alguns símbolos matemáticos de forma incorreta. Em alguns momentos, a professora orientadora interveio para esclarecer dúvidas e auxiliar na condução das atividades. Apesar desses imprevistos, a aula contou com boa participação dos alunos, que se mostraram interessados e fizeram diversas perguntas ao longo do encontro.

AULA 03 (24/05/2025) – PLANO DE AULA

Plano de Aula – Frações e Porcentagem 24/05/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Compreender e aplicar os conceitos de conjunto, fração e porcentagem, desenvolvendo habilidades de cálculo e raciocínio lógico que permitam a utilização desses conhecimentos em situações do cotidiano.

Objetivos específicos:

- Compreender e aplicar o conceito de conjunto e pertinência;
- Identificar relações de interseção, união e exclusão entre conjuntos;
- Utilizar o diagrama de Venn como forma de representação;
- Estimular o raciocínio lógico, trabalho em grupo e a autonomia dos alunos;
- Entender o conceito de fração como forma de representar uma parte de um todo, seja ela uma quantidade inteira ou não;
- Realizar as operações básicas com frações e aplicar esses conhecimentos em contextos do dia a dia;
- Compreender o significado da porcentagem como uma forma de representar frações com denominador 100;
- Estabelecer relações entre frações e porcentagens;
- Desenvolver habilidades de cálculo e raciocínio lógico por meio de situações-problema envolvendo frações e porcentagens;
- Interpretar diferentes representações de um todo utilizando a porcentagem.

Conteúdo: Conjuntos, frações, porcentagem.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, quadro e giz, materiais manipuláveis, jogos.

Encaminhamento metodológico:

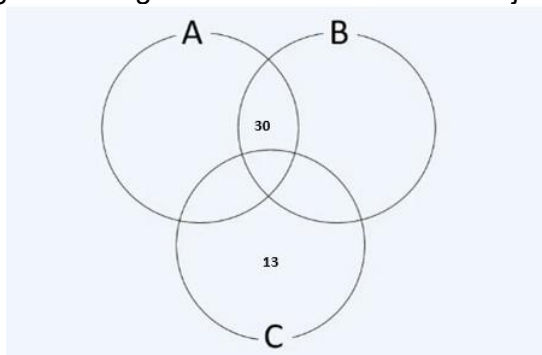
Iniciaremos a aula retomando a lista de exercícios entregue no encontro anterior a respeito de conjuntos, esclarecendo dúvidas e resolvendo um exercício sugerido pelos próprios estudantes ou, na ausência de sugestões, selecionaremos um dos cinco exercícios disponíveis, priorizando aquele que aborde de forma mais abrangente os conteúdos trabalhados.

(10 minutos)

Após a correção dos exercícios entregues na aula anterior e a discussão das dúvidas, será aplicada a dinâmica “Caça aos Conjuntos”, retomada do plano anterior devido à falta de tempo no encontro. A atividade será realizada em grupos e terá como objetivo revisar e consolidar os conceitos de conjuntos, elementos, pertinência e interseção, por meio da classificação de elementos em um diagrama de Venn.

A turma será dividida em 3 grupos. Cada grupo receberá um diagrama de Venn (Figura 1) com três conjuntos vazios que se intersectam: números pares, números primos e divisíveis por 3. Espalhados pela sala, haverá 15 cartões com *QR Codes*, cada um contendo uma pista que leva a um número (que faz parte de um dos conjuntos). Os estudantes deverão escanear os códigos, resolver os desafios e classificar os números nos conjuntos adequados, incluindo regiões de interseção ou fora dos conjuntos, quando for o caso. Será desenhado no quadro um diagrama como o entregue a eles, com alguns elementos que ajudarão a desvendar as propriedades dos conjuntos (elementos: 13 – conjunto dos números primos; 30 – conjunto dos números pares e divisíveis por três).

Figura 7: Diagrama de Venn com três conjuntos.



Fonte: Acervo dos autores

Durante a atividade, os alunos deverão:

- Resolver as pistas dos QR Codes;
- Analisar as propriedades matemáticas de cada número que será elemento do conjunto;
- Posicionar corretamente os elementos no diagrama de Venn;
- Discutir e justificar as classificações com os colegas de grupo.

Os professores circularão entre os grupos para auxiliar na compreensão dos conceitos, esclarecer as dúvidas e garantir o bom andamento da atividade. Ao final, será realizada uma apresentação por grupo e uma correção coletiva, com destaque para os conceitos de interseção, exclusão e pertinência.

Caso a turma encontre dificuldades, a mediação será intensificada para que a atividade não ultrapasse 25 minutos. Os materiais necessários estão anexados a este plano.

(25 minutos)

Vamos explorar o conjunto dos racionais, que foi citado na aula anterior, para introduzirmos o tema de frações. Citaremos definições e resolveremos atividades junto com os alunos.

Chama-se conjunto dos **números racionais** o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Q} = \{ \dots, -\frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{3}, \dots, \frac{5}{3}, \dots \}$$

Definição de fração: Fração é um número que representa uma quantidade da parte de um todo. A fração é composta por dois elementos: o numerador, que indica quantas partes do todo estão sendo consideradas, e o denominador, que indica em quantas partes iguais o todo foi dividido.

Como exemplo, temos: Na fração $\frac{1}{4}$, o número um representa o numerador e o número quatro o denominador. Assim temos uma fração chamada “um quarto”.

Frações equivalentes: São aquelas que representam a mesma parte do todo. Assim, multiplicando-se ou dividindo-se o numerador e o denominador de uma fração qualquer por um mesmo número natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial.

Vamos multiplicar e dividir, por exemplo, o numerador e o denominador da fração:

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \times 2}{8 \times 2} = \frac{12}{16} \quad \left| \quad \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4} \quad \left| \quad \frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Frações irredutíveis: São frações que não se pode simplificar mais. Para alcançarmos uma fração irredutível, devemos fatorar o numerador e o denominador simplificando os fatores comuns do numerador e do denominador.

Informalmente, isso equivale a “dividir o numerador e o denominador pelo mesmo valor até isso não ser mais possível”. Por exemplo,

$$\frac{78}{36} = \frac{78 \div 2}{36 \div 2} = \frac{39}{18} = \frac{39 \div 3}{18 \div 3} = \frac{13}{6}$$

Note que

$$\frac{78}{36} = \frac{13 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 2}$$

Como 13 é um número primo (um número divisível apenas por 1 ou por ele mesmo), não podemos simplificar mais, obtendo assim a fração irredutível $\frac{13}{6}$.

Multiplicação de Fração: Para calcular o resultado da multiplicação de duas frações, é necessário multiplicar o numerador da primeira fração pelo numerador da segunda fração e o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda.

Ex.:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

Divisão de Fração: Para dividir frações, é necessário manter a fração do numerador e multiplicá-la pelo recíproco do denominador. Em símbolos,

Ex.:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \frac{3}{4} \div \frac{7}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

Na sequência, discutiremos as diferentes representações de frações:

$$\frac{\frac{10}{12}}{\frac{5}{8}} = \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{5} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$$

Exercícios:

1. Determine:

a. O triplo de $\frac{7}{15}$

b. O dobro de $\frac{5}{8}$

Resposta: a. $\frac{7}{5}$; b. $\frac{5}{4}$.

Calcule:

a. $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}}$

b. $\frac{10}{\frac{2}{5}}$

Resposta: a. $\frac{10}{21}$; b. 25.

Adição e Subtração de Fração: A adição e subtração de frações com denominadores iguais é uma fração cujo denominador é igual ao das parcelas e o numerador é o resultado da mesma operação entre os numeradores.

Por exemplo:

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1+3}{7} = \frac{4}{7}$$

E, se nós quisermos somar e subtrair frações com denominadores diferentes? Como, por exemplo, as frações abaixo:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12}$$

Para somar e subtrair frações com denominadores diferentes, é preciso transformá-las em frações com o mesmo denominador. Para isso, podemos obter as frações equivalentes de cada parcela, de modo a obtermos frações com o mesmo denominador, ou utilizar o mínimo múltiplo comum, descrito a seguir.

MMC (Mínimo Múltiplo Comum): O mínimo múltiplo comum (MMC) corresponde ao menor número inteiro positivo, diferente de zero, que é ao mesmo tempo, de dois ou mais números. Para calcular o MMC, usamos o método da fatoração, ou seja, decompor os números em fatores primos.

Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 8, 10, 12 & 2 \\ 4, 5, 6 & 2 \\ 2, 5, 3 & 2 \\ 1, 5, 3 & 3 \\ 1, 5, 3 & 5 \\ 1, 1, 1 & \end{array}$$

Agora, devemos multiplicar todos os primos que resultará em 120, que é o denominador da nossa fração final. Após isso, dividimos o MMC encontrado pelo valor de cada denominador e multiplicamos pelo numerador. Esse é o resultado de cada numerador das frações que devem ser somados para obter o numerador final.

E calculando a expressão temos:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12} = \frac{15 + 36 + 50}{120} = \frac{101}{120}$$

Exercícios:

Calcule o MMC (18, 27, 36).

Resolução: 108.

Resolva as expressões:

a) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{6} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

Resolução: a. $\frac{5}{6}$; b. $\frac{25}{12}$; c. $\frac{19}{20}$.

Porcentagem: Representada pelo símbolo %, como seu próprio nome indica, porcentagem ou por cem, é a divisão de um número qualquer por 100. Ela pode ser

representada na forma percentual 12%, forma fracionária $\frac{12}{100}$ e na forma decimal 0,12.

Forma percentual para fracionária:

$$\text{a) } 26\% = \frac{26}{100} \qquad \text{b) } 0,1\% = \frac{0,1}{100}$$

Forma percentual para decimal:

$$\text{a) } 14\% = \frac{14}{100} = 0,14 \qquad \text{b) } 0,5\% = \frac{0,5}{100} = \frac{5}{1000} = 0,005$$

Dízima periódica e fração geratriz: Em divisões não exatas, algumas vezes o quociente é uma dízima periódica. Numa dízima periódica, o número formado pelos algarismos que se repetem chama-se período.

Observe o exemplo abaixo:

$$\frac{5}{11} = 0,454545\dots \text{ ou } 0,\overline{45}$$

A dízima $0,\overline{45}$ tem período 45. Dizemos que $5/11$ é a fração geratriz da dízima $0,\overline{45}$. A dízima periódica $0,\overline{45}$ é simples, porque seu período tem início logo após a vírgula.

Veja outro exemplo:

$$\frac{11}{6} = 1,8333\dots \text{ ou } 1,\overline{83}$$

A dízima periódica $1,\overline{83}$ tem período 3. Dizemos que $\frac{11}{6}$ é a fração geratriz da dízima 1,8333...

Exercício:

1. Complete a tabela:

Porcentagem	5%	6%	50%	60%	150%	160%
Forma de fração		$\frac{6}{100}$			$\frac{150}{100}$	
Forma decimal	0,05		0,5			1,6

Resolução:

Porcentagem	5%	6%	50%	60%	150%	160%
-------------	----	----	-----	-----	------	------

Forma de fração	$\frac{5}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{50}{100}$	$\frac{60}{100}$	$\frac{150}{100}$	$\frac{160}{100}$
Forma decimal	0,05	0,06	0,5	0,6	1,5	1,6

(115 minutos)

Dinâmica para aperfeiçoar o que foi abordado durante a aula e retomar o conteúdo.

Para isso, iremos separar os alunos em 3 grupos onde eles poderão se formar duplas, será entregue um baralho de Whole para cada mesa. Os professores irão explicar as regras do jogo para cada mesa e preparar o baralho para usar somente frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$. Ao achar válido o professor pode adicionar as cartas equivalentes à $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{5}$. Ainda se a mesa de jogadores achar fácil trabalhar com estas frações o professor pode adicionar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.

O jogo *Whole* é um baralho onde cada carta corresponde a uma parte de uma poção, e seu objetivo é conseguir juntar uma poção inteira exata. Cada jogador compra cartas em sentido horário até completar uma poção exata, quem descobrir que fechou uma poção exata primeiro ganha. Caso o jogador tiver mais que um inteiro em sua mistura, ele deve descartar cartas, uma a uma, até que tenha menos de um em sua mistura.

Se um jogador perceber que outro jogador comprou uma carta tendo mais de uma poção inteira em sua mistura, ele pode acusar o jogador, se for verificado que ele tem de fato mais que um inteiro, o acusador pode pegar uma carta do acusado e adicionar a sua mistura, se o acusado não tiver mais de um inteiro, o acusado poderá pegar uma carta do acusador e adicionar a sua mistura.

Caso o jogador compre uma carta chamado elemento X, esse mesmo perde todas as suas cartas de poção, então ele junta suas cartas, o elemento X e a pilha de descartes e embaralha no monte de cartas.

(50 Minutos)

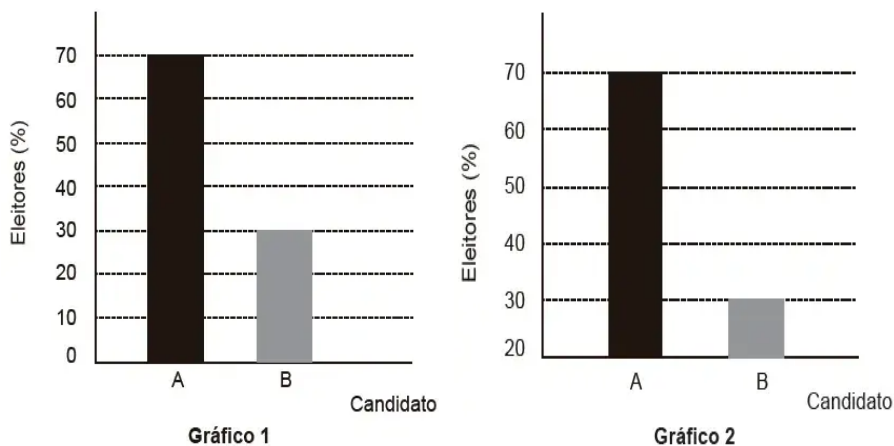
Avaliação:

Os estudantes serão avaliados pela sua participação nas dinâmicas e atividades realizadas em sala, assim como nos resultados das questões feitos em sala.

Lista de Exercícios:

Lista de exercícios para ser resolvida em casa:

1. (ENEM 2017) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico



Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o gráfico 2.

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

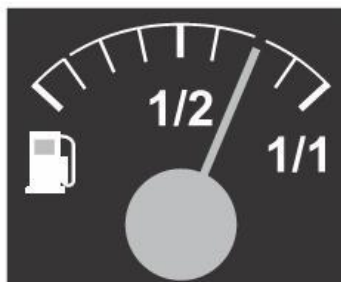
- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{8}{35}$

2. (UEMA 2015) Uma empresa fabricante de suco que envasava o produto em frascos de vidro passou a fazer o envasamento em um novo vasilhame plástico com capacidade de $\frac{2}{3}$ do frasco anterior. A lanchonete revendedora enche de suco um copo com capacidade de $\frac{1}{5}$ do frasco de vidro. A quantidade de copos de suco (inteiro + fração) que a lanchonete obtém com um frasco do novo vasilhame é igual a

- a) 1 copo e $\frac{2}{3}$ d) 3 copos e $\frac{1}{3}$
b) 2 copos e $\frac{1}{3}$ e) 3 copos e $\frac{2}{3}$
c) 2 copos e $\frac{2}{3}$

3. (ENEM 2016) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 litros de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km, o motorista observou que o

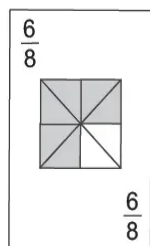
marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.



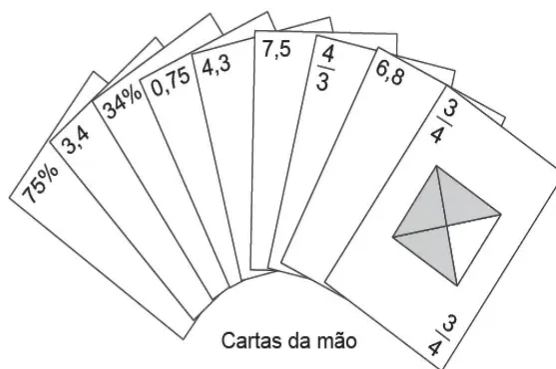
Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida. Qual a máxima distância, em quilômetros, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

Resolução: O marcador de consumo de combustível indica que foi gasto $1/4$ do combustível, logo resta $3/4$. Como no tanque cabem 50 litros e o automóvel faz 15 km/L, com um tanque, é possível percorrer $50 \cdot 15 = 750$ km. Agora, basta calcular $3/4$ de 750, ou seja, $\frac{3}{4} \cdot 750 = \frac{2250}{4} = 562,5$. Portanto, a autonomia do veículo seria de 562,5 quilômetros.

4. (ENEM 2015 - Adaptado) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



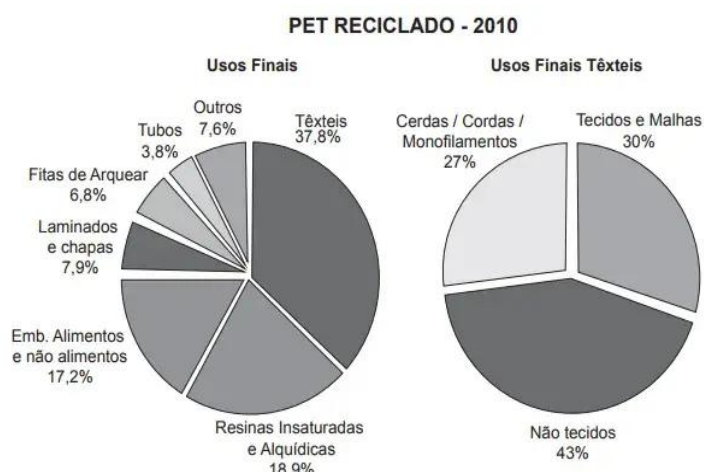
Carta da mesa



Cartas da mão

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

5. (ENEM 2015 - Adaptado) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, qual a quantidade aproximada de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton?

Apêndice A - Dinâmica “Caça aos conjuntos”

Classificação dos Elementos

Conjuntos definidos:

A = Números Pares

B = Números Primos

C = Divisíveis por 3

Elementos analisados:

1 → fora dos conjuntos	2 → A, B	3 → B, C	4 → A	5 → B
6 → A, C	7 → B	8 → A	9 → C	10 → A
11 → B	12 → A, C	15 → C	18 → A, C	21 → C

Resumo por conjunto

• A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 18}

B = {2, 3, 5, 7, 11}

C = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21}

Interseções:

- $A \cap B = \{2\} \rightarrow A \text{ e } B$
- $A \cap C = \{6, 12, 18\} \rightarrow A \text{ e } C$
- $B \cap C = \{3\} \rightarrow B \text{ e } C$
- $A \cap B \cap C = \{\} \rightarrow$ nenhum número pertence aos três conjuntos

Respostas QR Codes

Eu sou $10 + 11$, “A soma da base com a vibe”. 21

Eu sou o número 18, a maioria da matemática — tá liberado para tudo! 18

Eu sou a raiz quadrada de 121. 11

Eu sou 2^3 . 8

Eu sou o número que nunca muda na multiplicação: tipo firmeza total! 1

Eu sou $(2^2 + 2) \times 2$. 12

Eu sou o resultado da equação $2x + 1 = 7$, se $x = 3$. 7

Eu sou raiz de 225: bonita, exata e redonda. 15

Eu sou o dobro de 5 — tipo dois irmãos gêmeos somando forças. 10

Eu sou $10^2 - 91$. 9

Eu sou a metade da divisão 20 sobre 2. 5

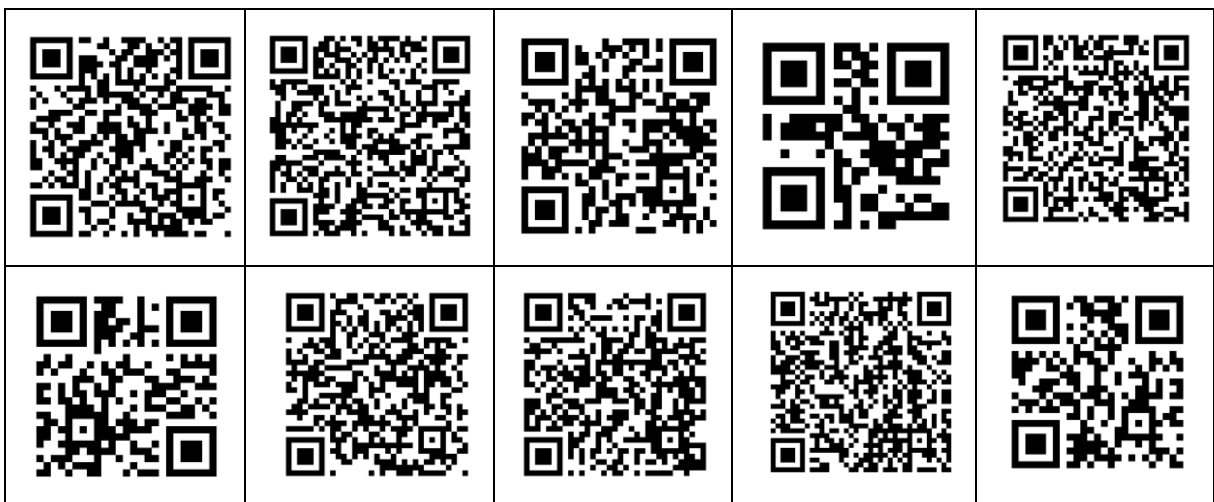
Eu sou $x + y$, se $x = 1$ e $y = 3$. 4

Eu sou o resultado da expressão $2+1$. 3

Eu sou a raiz quadrada de 4. 2

Eu sou o valor do lado de um quadrado com perímetro de 24 m. 6

Apêndice B – QRs Codes da Dinâmica “Caça aos conjuntos”





Relatório da aula ministrada - 24/05/2025

No dia 24 de maio de 2025, começamos a aula às 8h05 com 35 alunos, resolvemos com a turma os exercícios dois e quatro da lista da semana anterior. Queríamos expor somente uma, mas notamos a necessidade das duas. As questões foram selecionadas pelos alunos e havia reais dúvidas nas soluções.

Iniciamos o caça aos conjuntos da aula, os estudantes foram induzidos a levantar e procurar *QR codes* espalhados e escondidos pela sala, os alunos participaram muito bem durante a caça e conseguiram encontrar, depois as pessoas com mais afinidade ao conteúdo descobriram as propriedades que formavam os conjuntos. Demos várias dicas referentes aos números para ajudar a encontrar a propriedade. Notamos que um dos grupos encontrou uma solução diferente, onde ao invés de $\{x|x \text{ é divisível por } 3\}$ encontraram $\{x|x \text{ é divisível por } 5\}$.

Após isso os alunos permaneceram em grupo e o conteúdo sobre frações foi iniciado, durante as explicações sobre divisão de fração, os alunos apresentaram dificuldade de assimilar o método resolutivo de multiplicar pelo inverso, e tiveram dificuldade em diferenciar o numerador e denominador fracionários. Tivemos atraso nos primeiros minutos o que fez que o conteúdo sobre soma, subtração e MMC ficassem para após o intervalo. Na explicação sobre MMC, mostramos sobre a técnica da multiplicação cruzada dos numeradores com denominadores, questionamos os alunos sobre qual método era preferível e verificamos que havia discordância nas formas, e apresentamos as duas maneiras nos exercícios.

Introduzimos a conversão de fração, decimal e percentual de forma breve para ganharmos tempo na dinâmica, percebemos que os alunos já haviam feito todos os exercícios programados durante a explicação. Verificamos que eles têm menos dificuldade com percentual. Com isso, seguimos com a dinâmica-jogo Whole.

Neste jogo, como programado, dividimos em três grupos e pedimos para se reunirem também em duplas, os alunos tiveram muita dificuldade de entender o

objetivo do jogo e resolvê-lo. Quando viam uma fração $\frac{1}{16}$, achavam que era um número muito grande, por conta de o valor do denominador ser 16 comparando-o com 2 de $\frac{1}{2}$. Mesmo com ajuda dos professores ao mostrar a possibilidade de somar frações com denominadores iguais, eles ainda tiveram dificuldade, outros não conseguiram notar que completavam um inteiro mesmo com cartas sendo $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Contudo, eles participaram e muitos queriam terminar o jogo mesmo com o término do encontro. Agradecemos a presença dos alunos, tivemos alunos que agradeceram também pela aula e finalizamos o terceiro encontro.

Essa aula mostrou maior participação dos estudantes, principalmente durante o “Caça aos Conjuntos” e o jogo Whole, mas percebemos que faltou uma melhor organização dos grupos, pois em alguns momentos estavam dispersos e demoravam para iniciar as atividades, o que gerou atrasos no andamento da aula. Além disso, nossa atuação foi muito centrada em explicações, mesmo durante os jogos, e poderíamos ter planejado melhor a divisão de tarefas entre nós como professores, para que enquanto um conduzia a atividade, o outro pudesse orientar os grupos individualmente, garantindo melhor suporte às dúvidas.

Consideramos que o que funcionou foi o Caça aos Conjuntos, pois motivou os alunos e promoveu interação, além do interesse demonstrado pelo jogo Whole, que despertou curiosidade e envolvimento até o fim. O que não funcionou completamente foi o gerenciamento dos grupos durante os jogos, pois muitos não entenderam o objetivo, e a explicação sobre soma de fração com denominadores diferentes, no jogo “Whole”, que não foi totalmente assimilada.

Se fôssemos refazer essa aula, planejaríamos uma organização mais clara dos grupos e duplas antes das dinâmicas, utilizaríamos materiais concretos para explicar sobre fração, e dividiríamos melhor nossas funções como professores durante as atividades, para atender as necessidades dos grupos de forma mais eficiente.

Anexo 01 – Lista de Exercícios encontro 03

Lista de exercícios para ser resolvida em casa:

1. (ENEM 2017) O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico

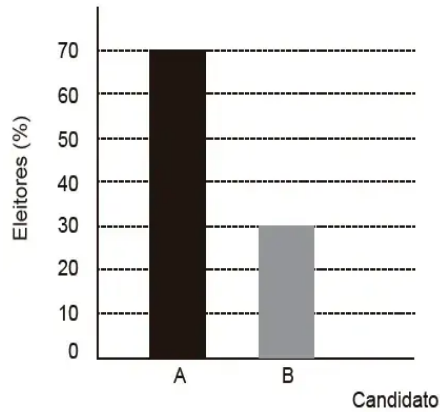


Gráfico 1

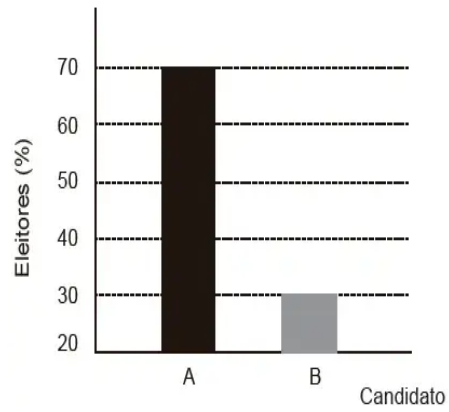


Gráfico 2

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o gráfico 2.

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

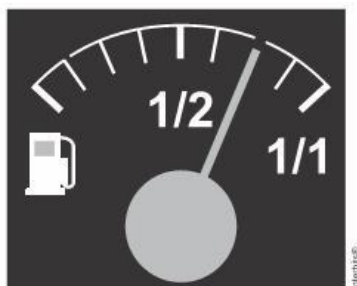
A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{8}{35}$

2. (UEMA 2015) Uma empresa fabricante de suco que envasava o produto em frascos de vidro passou a fazer o envasamento em um novo vasilhame plástico com capacidade de $\frac{2}{3}$ do frasco anterior. A lanchonete revendedora enche de suco um copo com capacidade de $\frac{1}{5}$ do frasco de vidro. A quantidade de copos de suco (inteiro + fração) que a lanchonete obtém com um frasco do novo vasilhame é igual a

- a) 1 copo e $\frac{2}{3}$ d) 3 copos e $\frac{1}{3}$
b) 2 copos e $\frac{1}{3}$ e) 3 copos e $\frac{2}{3}$
c) 2 copos e $\frac{2}{3}$

3. (ENEM 2016) No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 litros de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km, o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.



Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida. Qual a máxima distância, em quilômetros, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

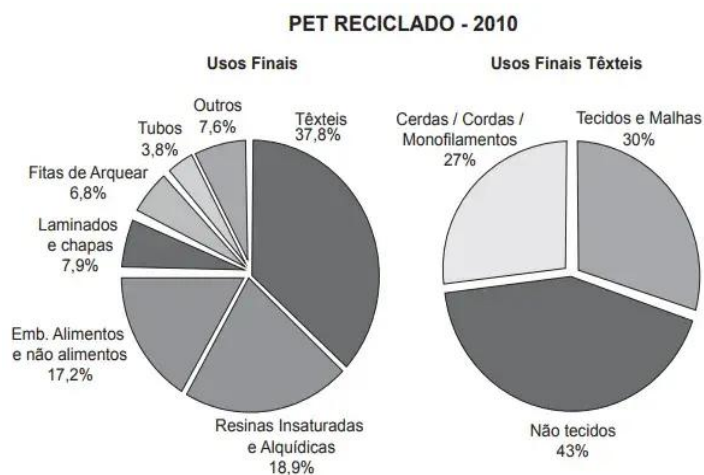
Resolução: O marcador de consumo de combustível indica que foi gasto $1/4$ do combustível, logo resta $3/4$. Como no tanque cabem 50 litros e o automóvel faz 15 km/L, com um tanque, é possível percorrer $50 \cdot 15 = 750$ km. Agora, basta calcular $3/4$ de 750, ou seja, $\frac{3}{4} \cdot 750 = \frac{2250}{4} = 562,5$. Portanto, a autonomia do veículo seria de 562,5 quilômetros.

4. (Enem 2015 - Adaptado) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

5. (ENEM 2015 - Adaptado) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, qual a quantidade aproximada de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton?

AULA 04 (31/05/2025) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Razão, Proporção e Regra de Três – 31/05/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Capacitar os alunos para a compreensão e aplicação dos conceitos de razão, proporção e regra de três, para que, com isso, possam utilizá-los no cotidiano.

Objetivos específicos:

- Explorar o conceito de escala como aplicação prática de razão e proporção.
- Relacionar a atividade do desenho com o conceito de escala, destacando sua importância em mapas, plantas e projetos.
- Utilizar a regra de três para resolver problemas envolvendo escalas e proporções, entre outras situações.
- Explorar a regra de três composta e suas aplicações.

Conteúdo: Razão, proporção e regra de três.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

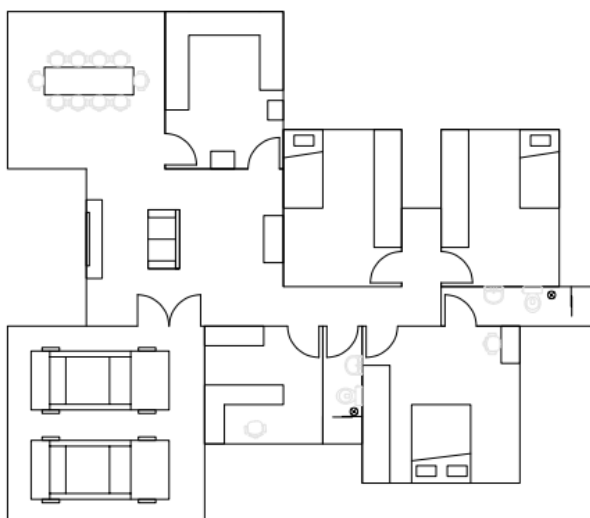
Recursos didáticos: Atividades impressas, folhas de papel sulfite (A4 e A5), lâminas, régua, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

Ao iniciarmos o encontro, um exercício da lista entregue na aula anterior será corrigido. Solicitaremos que os alunos tragam régua de casa e iremos disponibilizar para aqueles que não as tiverem. Em seguida, entregaremos individualmente uma folha de papel A4 com o desenho de uma planta baixa e, também, uma folha A6. A ideia é que os alunos reproduzam o desenho da folha A4 na folha A6, da maneira mais semelhante possível, porém, em tamanho reduzido.

Explicaremos que planta baixa é a representação da vista superior de uma edificação (construção) sem o telhado.

Figura 8: Planta baixa



Fonte: Acervo dos autores, 2025

Com isso, introduziremos o conteúdo de **razão e proporção**, e explicaremos a ideia de escala, até o horário do intervalo.

Razão: Dados dois números a e b , com b diferente de zero, chamamos de razão de a para b , ou simplesmente razão entre a e b , nessa ordem, o quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado por $a:b$.

Exemplos de razão:

- Velocidade média: razão entre distância e tempo;
- Densidade de um corpo: razão entre massa do corpo e volume que ele ocupa;
- Densidade demográfica: razão entre número de pessoas e área ocupada;
- Escala: razão entre a medida real e a medida do desenho.

Proporção é a igualdade entre duas ou mais razões. Uma proporção é representada por $a:b = c:d$ e lê-se “a está para b assim como c está para d”. a e d são os extremos; b e c são os meios.

Os números a, b, c, d chamam-se termos da proporção e devem ser racionais não nulos.

Consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com b e d diferentes de zero.

Vale então:

1ª Propriedade Fundamental: Em toda proporção, o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios. Nesse caso, $a \cdot d = b \cdot c$, onde $a \cdot d$ é denominado produto dos extremos e $b \cdot c$ é denominado produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

2ª propriedade da proporção: Dadas duas razões proporcionais, a soma entre os numeradores e denominadores dessas frações também gerará uma nova razão proporcional às duas anteriores.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

3ª propriedade da proporção: Dadas duas razões proporcionais, a diferença entre os numeradores e denominadores dessas frações também gerará uma nova razão proporcional às duas anteriores.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

4ª propriedade da proporção

A adição do numerador com o denominador dividida pelo valor do numerador da primeira proporção é equivalente à adição do numerador com o denominador dividida pelo valor do numerador da segunda proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

O que são escalas? A escala é uma relação de proporção entre duas medidas.

Isso significa que a escala nos ajuda a comparar o tamanho de um objeto em relação a outro objeto, ou a uma medida padrão. A escala pode ser expressa de diferentes maneiras, como uma fração, uma razão ou um número decimal.

A escala pode ser escrita diretamente como uma **fração**:

$$\frac{6}{24}$$

Isso, indica que 6 unidades no desenho correspondem a 24 unidades na realidade.

Como **razão**: A mesma escala pode ser expressa como uma razão (muito comum em mapas e plantas): 6:24 Ou, simplificando: 1:4. Isso significa que cada 1 unidade no desenho representa 4 unidades na realidade.

Como **número decimal ou porcentagem**: Também podemos expressar essa escala como um número decimal, dividindo os valores:

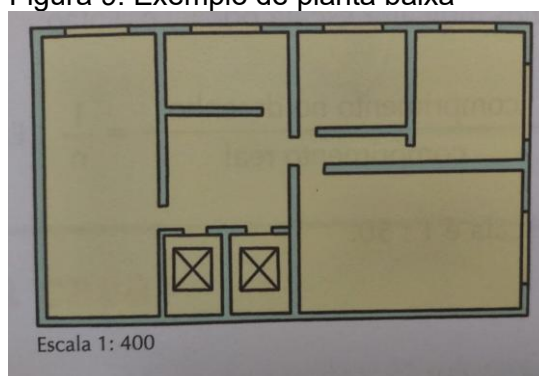
$$\frac{6}{24} = 0,25$$

Nesse caso, o número decimal 0,25 indica que o desenho é 25% do tamanho real, ou seja, é uma redução.

Exemplo de escala

Veja a planta de um escritório:

Figura 9: Exemplo de planta baixa



Fonte: Iezzi, G. e Dolci O., 2009

Para retratar o escritório sem distorções, a planta é feita cuidadosamente. Nesse caso, todos os comprimentos reais foram divididos por 400. Depois, o desenho foi feito com as medidas obtidas nessas divisões.

A informação desse fato consta da planta, na escala. No caso, a escala é 1: 400, ou seja, um para quatrocentos; isso significa que cada 1 cm do desenho corresponde a 400cm (4 metros) do escritório real.

Perceba então que a escala é uma razão entre o que se passa no desenho e o que se tem na realidade.

Na escala 1 : n , tem-se:

$$\frac{\text{comprimento no desenho}}{\text{comprimento real correspondente}} = \frac{1}{n}$$

Intervalo

Após o intervalo, pretendemos iniciar o conteúdo de grandezas, regra de três e, em seguida, pedir que os alunos refaçam o desenho utilizando a razão correta, mostrando que uma das formas de fazer isso é por meio da regra de três. Por fim, o conteúdo de regra de três composta será abordado, com alguns exercícios para serem resolvidos.

Grandezas diretamente proporcionais: Dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais, quando se uma delas aumenta, a outra aumenta na mesma proporção e, do mesmo modo, se uma delas diminui, a outra diminui na mesma proporção (admitindo todas as demais grandezas constantes). Por exemplo, quando colocamos gasolina no automóvel, o preço que pagamos é diretamente proporcional ao volume de gasolina colocado: duplicando o volume, duplica-se o preço; triplicando o volume, triplica-se o preço etc.

Grandezas inversamente proporcionais: Dizemos também que duas grandezas são inversamente proporcionais quando, se uma delas aumenta, a outra diminui na mesma proporção e, do mesmo modo, se uma delas diminui, a outra aumenta na mesma proporção (admitindo todas as demais grandezas constantes). O tempo que levamos para fazer uma certa viagem, por exemplo, é inversamente proporcional à velocidade: duplicando a velocidade, o tempo de viagem não duplica, e sim cai para a metade; triplicando a velocidade, o tempo é reduzido para um terço etc.

Regra de três: Existe um método para resolver problemas envolvendo grandezas proporcionais chamada regra de três.

Quando o problema tem duas grandezas, utilizamos uma **regra de três simples**. Esse método consiste em resolver problemas que envolvam quatro valores, dos quais três são conhecidos e por meio deles determinamos o valor desconhecido.

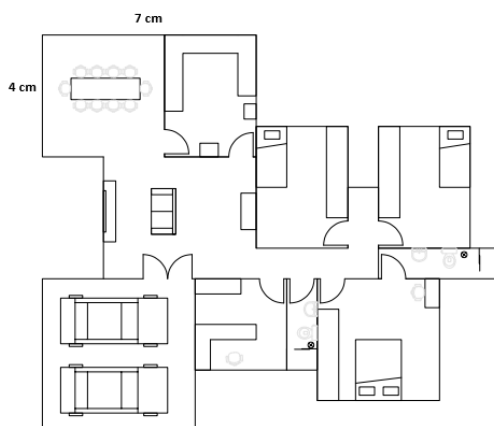
Já quando temos problemas envolvendo mais do que duas grandezas, chamamos de **regra de três composta**.

O estudo da regra de três ocorrerá em duas etapas, uma com grandezas diretamente proporcionais e outra com grandezas inversamente proporcionais.

Para regra de três simples podemos relacionar com a nossa planta baixa. Para que possamos replicar ela de forma precisa podemos utilizar a regra de três simples.

Por exemplo, na figura abaixo, quando formos replicar a planta baixa, escolheremos uma medida para a parte que tem o valor de 7. Suponha que quando desenhei no papel A6, fiz uma linha de 3,5cm e a medida da lateral é 4, qual seria o valor da lateral na folha A6?

Figura 10: Planta baixa com medidas



Fonte: Acervo dos autores, 2025

Temos então:

$$\frac{7}{4} = \frac{7}{x}$$

Chamando o valor que precisamos encontrar de x temos uma regra de três simples. Considerando que um lado diminuiu, para ficar proporcional o outro também deverá ser menor, então a grandeza é diretamente proporcional.

Resolvendo:

$$7x = 4 \frac{7}{2}$$

$$7x = \frac{28}{2}$$

$$x = \frac{14}{7}$$

$$x = 2$$

Após a explicação, solicitaremos que os alunos refaçam a planta baixa respeitando a proporcionalidade.

Após os alunos tiverem um tempo para reproduzirem novamente as plantas baixas, será proposto uma questão de regra de três para que eles possam tentar resolver. Após isso vamos verificar as diferentes formas de resolução e mostraremos uma maneira.

Questão para introduzir regra de três composta:

(IBADE 2018/Prefeitura de Vila Velha) Em uma campanha municipal, o coordenador utilizou 20 agentes de mesma eficiência para visitar 3.000 residências em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia. O coordenador decidiu fazer uma nova campanha visitando 4.500 novas residências, mas só utilizará 16 desses agentes trabalhando 10 horas por dia. O tempo, em dias, que durará a nova campanha será: a) 12. b) 15. c) 20. d) 35. e) 46.

Resolução: Vamos montar uma tabelinha para organizar os dados do problema.

<i>Agentes</i>	<i>Residências</i>	<i>Dias</i>	<i>Horas por dia</i>
20	3.000	10	8
16	4.500	x	10

Vamos simplificar as colunas. A primeira coluna pode ser simplificada por 4; a segunda coluna pode ser simplificada por 1.500 e a última coluna pode ser simplificada por 2.

<i>Agentes</i>	<i>Residências</i>	<i>Dias</i>	<i>Horas por dia</i>
5	2	10	4
4	3	x	5

Vamos agora comparar as grandezas conhecidas (agentes, residências e horas por dia) com a grandeza desconhecida (dias). Começamos colocando uma seta para baixo na coluna dos dias. A quantidade de agentes diminuiu. Assim, eles levarão mais dias para visitar as residências. Como uma grandeza diminuiu enquanto a outra aumentou, as grandezas são inversamente proporcionais. Devemos colocar uma seta para cima na coluna dos agentes. O número de residências aumentou. Assim,

precisaremos de mais dias para visitar todas. Como as duas grandezas aumentaram, elas são diretamente proporcionais. Vamos colocar uma seta para baixo na coluna das residências. A jornada diária de trabalho aumentou. Assim, precisamos de menos dias para executar a tarefa. Como uma grandeza aumentou enquanto a outra diminuiu, as grandezas são inversamente proporcionais. Vamos colocar uma seta para cima na coluna das horas por dia.

<i>Agentes</i>	<i>Residências</i>	<i>Dias</i>	<i>Horas por dia</i>
↑ 5	↓ 2	↓ 10	↑ 4
4	↓ 3	↓ x	5

Agora é só armar a proporção:

$$\frac{10}{x} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2x = 30$$

$$x = \frac{30}{2}$$

Após isso deixaremos exercícios visando a fixação dos conteúdos abordados. Durante esse período os estagiários circularão esclarecendo dúvidas que possam surgir.

Avaliação:

A avaliação será formativa e contínua, considerando diferentes aspectos do desempenho dos alunos ao longo da atividade. Serão observadas a compreensão e a aplicação correta dos conceitos de razão, proporção e escala, bem como a capacidade de realizar cálculos coerentes para construir um desenho proporcional ao modelo original. A participação, o envolvimento nas etapas da atividade e a capacidade de justificar suas escolhas também serão levados em conta como parte do processo avaliativo.

Lista de exercícios:

1.(ENEM 2016 PPL) O quadro apresenta dados sobre viagens distintas, realizadas com o mesmo veículo, por diferentes motoristas. Em cada viagem, o veículo foi abastecido com combustível de um preço diferente e trafegou com uma velocidade média distinta.

Motorista	Custo por litro de combustível (R\$)	Distância percorrida (km)	Velocidade média (km/h)
1	2,80	400	84
2	2,89	432	77
3	2,65	410	86
4	2,75	415	74
5	2,90	405	72

Sabe-se que esse veículo tem um rendimento de 15 km por litro de combustível se trafegar com velocidade média abaixo de 75 km/h. Já se trafegar com velocidade média entre 75 km/h e 80 km/h, o rendimento será de 16 km por litro de combustível. Trafegando com velocidade média entre 81 km/h e 85 km/h, o rendimento será de 12 km por litro de combustível e, acima dessa velocidade média, o rendimento cairá para 10 km por litro de combustível.

Qual foi o motorista que realizou a viagem que teve o menor custo com combustível?

Resolução: O motorista 1 percorrendo 400 km a uma velocidade de 84 km/h tem rendimento 12 km/L, então o gasto com combustível é

$$400 \cdot 2,8 / 12 = 93,33 \text{ reais}$$

O motorista 2 percorrendo 432 km a uma velocidade de 77 km/h tem rendimento 16 km/L, então o gasto com combustível é

$$432 \cdot 2,89 / 16 = 78,03 \text{ reais}$$

O motorista 3 percorrendo 410 km a uma velocidade de 86 km/h tem rendimento 10 km/L, então o gasto com combustível é

$$410 \cdot 2,65 / 10 = 108,65 \text{ reais}$$

O motorista 4 percorrendo 415 km a uma velocidade de 74 km/h tem rendimento 15 km/L, então o gasto com combustível é

$$415 \cdot 2,75 / 15 = 76,08 \text{ reais}$$

O motorista 5 percorrendo 405 km a uma velocidade de 72 km/h tem rendimento 15 km/L, então o gasto com combustível é

$$405 \cdot 2,9 / 15 = 78,30 \text{ reais}$$

O motorista 4 teve menor gasto.

A resposta é a letra d.

2. (ENEM 2021) Antônio, Joaquim e José são sócios de uma empresa cujo capital é dividido, entre os três, em partes proporcionais a 4, 6 e 6, respectivamente. Com a intenção de igualar a participação dos três sócios no capital da empresa, Antônio pretende adquirir uma fração do capital de cada um dos outros dois sócios. A fração do capital de cada sócio que Antônio deverá adquirir é

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{3}$

Resolução: Do enunciado sabemos que a empresa foi dividida em 16 partes, pois $4 + 6 + 6 = 16$. Essas 16 partes devem ser divididas em três partes iguais para os sócios. Como $\frac{16}{3}$ não é uma divisão exata. Podemos multiplicar por um valor comum, sem perder a proporcionalidade. Vamos multiplicar por 3 e verificar a igualdade

$$4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 16 \cdot 3$$

$$12 + 18 + 18 = 48$$

$$48 = 48$$

Dividindo 48 por 3 o resultado é exato.

$$\frac{48}{3} = 16$$

Agora, a empresa está dividida em 48 partes, das quais:

Antônio possui 12 partes das 48. Joaquim possui 18 partes das 48. José possui 18 partes das 48. Dessa forma, Antônio, que já tem 12, precisa receber mais 4 para ficar com 16. Por isso, cada um dos outros sócios, precisam passar 2 partes, das 18, para Antônio. A fração que Antônio precisa adquirir de casa sócio é $\frac{2}{18}$, simplificando:

$$\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

A resposta é letra c.

3. Uma torneira enche um tanque em duas horas enquanto outra enche o mesmo tanque em três horas. Quanto tempo as duas torneiras juntas levam para encher o tanque?

Resolução: Devemos observar que em uma hora a primeira torneira enche metade do tanque enquanto a segunda um terço do tanque. Logo as duas juntas em uma hora encherão $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ do tanque. Assim, sendo t a capacidade do tanque, teremos que:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot t = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{6} \cdot t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{6}{5} \Leftrightarrow t = \frac{6}{5}$$

4. (UERJ 1999) Uma máquina que trabalhava sem interrupções, fazia 90 fotocópias por minuto. Foi substituída por outra 50% mais veloz. Suponha que a nova máquina tenha que fazer o mesmo número de cópias que a antiga fazia em uma hora de trabalho ininterrupto. Para isso, a nova máquina vai gastar um tempo mínimo, em minutos, de:

- a) 25 b) 30 c) 35 d) 40

Resolução: A máquina nova é uma vez e meia mais rápida que a original. Logo, a velocidade de impressão é $1,5 \cdot 90 = 135$ fotocópias por minuto.

Para encontrar o tempo em que a máquina nova vai fazer 5400 fotocópias, devemos encontrar o tempo x de modo que $135 \cdot x = 5400$. Logo,

$$x = \frac{5400}{135} = 40 \text{ minutos.}$$

A resposta é letra d.

5. Em tempos de escassez de água, toda medida de economia é bem-vinda. Em um banho de 15 minutos com chuveiro aberto são gastos cerca de 135 litros de água a cada banho. Daniel resolveu reduzir seu banho para 9 minutos, obtendo assim uma economia de água a cada banho. Se Daniel tomar apenas um banho por dia, em um mês ele terá economizado:

- a) 1620 b) 2510 c) 5700 d) 3250

Resolução: Para essa solução, sabemos que em um dia, com um banho de 15 minutos, Daniel gasta 135 litros de água. Em um banho de 9 minutos qual será o gasto de água de Daniel em litros? Podemos perceber que as duas grandezas são diretamente proporcionais, já que quando aumentamos o tempo de banho o consumo aumentará proporcionalmente. Portanto, sabemos que 15 minutos está para 135 litros assim como 9 minutos está para x litros.

$$\frac{15}{9} = \frac{135}{x} \Rightarrow 15x = 9 \cdot 135 \quad \Bigg| \quad \Rightarrow x = \frac{1215}{15}$$

$$\Rightarrow 15x = 1215$$

$$\Rightarrow x = 81$$

Assim, o gasto diário de água seria 81 litros. Para encontrarmos o gasto mensal basta multiplicar pela quantidade de dias em um mês (assumiremos 30), isto é, $81 \cdot 30 = 2430$. A pergunta feita foi quantos litros de água foram economizadas em um mês, logo devemos encontrar quanto Daniel consome de água em um mês tomando banho um banho de 15 minutos por dia, $135 \cdot 30 = 4050$. Agora, para sabermos a economia, basta encontrarmos a diferença entre os dois valores encontrados, $4050 - 2430 = 1620$. A resposta é letra a.

6. Um navio de carga foi abastecido com comida suficiente para alimentar 14 pessoas durante 45 dias previstos para a viagem. Poucos minutos antes do navio sair do porto, 18 pessoas embarcaram nesse navio. Calculando o número de dias, no máximo, que serão suficientes as reservas de alimentos encontramos:

- a) 18 b) 19 c) 20 d) 21 e) 22

Resolução: De acordo com as nossas informações, sabemos que para 14 tripulante do navio, terão comida durante 45 dias, mas antes de sair para viagem mais 18 tripulantes embarcaram e queremos saber quantos dias teremos comidas para os atuais 32 tripulantes. Podemos perceber que as grandezas são inversamente proporcionais, com isso temos que, 14 tripulantes estão para 45 dias de alimento assim como 32 tripulantes estão para x dias de alimento, como são inversamente proporcionais já que se aumentarmos a quantidade de pessoas para comer determinada quantidade de comida, essa comida vai durar tantas refeições como anteriormente, portanto temos que, $\frac{32}{14} = \frac{45}{x} \Rightarrow 32x = 45 \cdot 14 \Rightarrow 32x = 630 \Rightarrow x = \frac{630}{32} \Rightarrow x = 19,6875$, logo terão comida durante 19 dias, sendo a alternativa b a correta.

6. Sabendo que 4 torneiras abertas enchem um tanque em 1 hora e 10 minutos, quantas torneiras iguais a essas será necessário para encher o mesmo tanque em 40 minutos?

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Resolução: Sabemos que 1 hora e 10 minutos são 70 minutos, esse é o tempo que 4 torneiras levam para encher um tanque, queremos saber quantas torneiras iguais as anteriores enchem o mesmo tanque em 40 minutos. Novamente podemos perceber que as grandezas são inversamente proporcionais, já que se diminuirmos o tempo para encher um tanque teremos que aumentar a quantidade de torneiras para isso. Sabemos que 4 torneiras estão para 70 minutos assim como x torneiras estão

para 40 minutos, como são inversamente proporcionais, teremos que, $\frac{4}{x} = \frac{40}{70} \Rightarrow 40x = 70.4 \Rightarrow 40x = 280 \Rightarrow x = \frac{280}{40} \Rightarrow x = 7$, portanto 7 torneiras serão necessárias para encher o tanque em 40 minutos, sendo a alternativa c a correta.

Relatório da aula ministrada – 31/05/2025

No dia 31 de maio de 2025, começamos a aula às 8h com 18 alunos, resolvemos com a turma o exercício um da lista da semana anterior, que contextualizava sobre diferença entre razões.

Iniciamos as atividades do encontro quatro entregando uma folha A4 com uma planta baixa para ser replicada em uma folha A6 quadriculada. Deixemos-vos desenvolverem por 20 minutos. Após finalizarem a representação das paredes da casa da planta baixa nós comentamos que sem uma razão entre as representações é mais condicional à desproporcionalidade do desenho.

Com isso, abrimos o conteúdo de razão e proporção, falando definições de cada uma e explicando 4 propriedades da proporção. Surgiram algumas dúvidas sobre as propriedades e havia um erro em uma delas no *slide* que logo corrigimos. Alguns exemplos para destacar as propriedades de proporção foram ilustrados.

Ademais, definimos escala e projetamos exemplos de mapas. Alguns exemplos de razão, proporção e escala. Como o Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci, o *site Google Maps* mostrando a distância da cidade de Cascavel-PR à Toledo-PR. Depois disso, entregamos uma tabela para ser preenchida por eles. Notamos que tinham muita dificuldade, em representar uma razão de diferentes formas. Após tirar algumas dúvidas individuais corrigimos a tabela utilizando a razão $\frac{6}{24}$.

Após o intervalo explicamos o conceito de grandezas diretamente e inversamente proporcionais mostrando exemplos no quadro. Bem como, definimos regra de três e a partir disso utilizamos as definições para que refizessem a planta baixa usando a proporção correta da escala escolhida por eles. Analisamos a forma como representaram na folha A6 e tiramos dúvidas pertinentes sobre escala e regra de três.

Para introduzir regra de três composta entregamos um exercício e fizemos a leitura. Organizamos as informações do exercício em forma de tabela no quadro negro e deixamos que eles resolvessem. Durante a resolução esclarecemos algumas dúvidas e demos sugestões de como chegar na solução do exercício.

Realizamos a correção do exercício ao mesmo tempo que explicávamos o conceito. Fornecemos também duas formas de resolver a mesma questão e faltou finalizar a segunda forma de resolver. Finalizamos o encontro deixando uma lista para ser resolvida em casa.

Avaliamos nossa atuação como positiva em relação à organização do tempo e ao uso de exemplos reais para contextualizar os conceitos. No entanto, percebemos que os alunos apresentaram dificuldades ao representar razões de formas diferentes, o que pode indicar a necessidade de reformular a explicação ou trazer exemplos mais simples e concretos antes de abordar propriedades formais.

O que funcionou foi a atividade prática de reprodução da planta baixa, pois aproximou o conteúdo à realidade deles e gerou interesse, além do uso do Google Maps para discutir escala. Já o que não funcionou completamente foi o tempo destinado à regra de três composta, pois não conseguimos finalizar todas as estratégias de resolução, o que pode ter prejudicado a fixação do conteúdo.

O que faríamos diferente seria inserir atividades investigativas em que os estudantes descubram conceitos antes de formalizá-los, além de diminuir o tempo de formalização teórica e consequentemente aumentar as atividades práticas.

AULA 05 (07/05/2025) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Polígonos e Poliedros – 07/06/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Compreender e explorar as propriedades, classificações e relações entre polígonos e poliedros, por meio de atividades práticas e conceituais, de modo a promover a construção significativa do conhecimento geométrico.

Objetivos específicos:

- Identificar e classificar diferentes tipos de polígonos (regulares, irregulares, convexos, côncavos);
- Reconhecer elementos constituintes dos poliedros (vértices, arestas e faces);
- Estabelecer relações entre planificações de poliedros e os polígonos que os compõem;
- Construir fisicamente poliedros a partir de suas planificações;

- Compreender e aplicar a fórmula de Euler;
- Incentivar a investigação, a argumentação.

Conteúdo: Polígonos e Poliedros.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, cola, tesoura, lâminas, régua, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula corrigindo um exercício da lista do encontro anterior que poderá ser de sugestão dos alunos, o qual tiveram mais dificuldade de entendimento ou escolhido pelos professores com base nas dúvidas deles, vale lembrar, que são exercícios de vestibulares e concursos anteriores que abordam o conteúdo de razão e proporção, logo em seguida, também devemos terminar de explorar uma segunda maneira de resolver um exercício apresentado durante a aula anterior sobre regra de três composta, que não foi concluído antes do término do encontro, pois a resolução foi diferente da descrita no plano de aula.

(10 minutos)

Para introduzir o conteúdo, vamos propor uma atividade para que os alunos trabalhem de forma investigativa induzindo a manipulação dos objetos para que percebam que poliedros e polígonos estão diretamente relacionados. Os alunos serão organizados em grupos de, no máximo, cinco integrantes, permanecendo assim durante toda a realização da atividade e ao longo do restante do encontro. Vamos entregar planificações de vários poliedros regulares e pedir que as recortem e montem os poliedros. Depois que os estudantes montarem os poliedros, verificaremos características relevantes de cada poliedro.

Para cada poliedro montado, serão analisados os polígonos presentes em sua planificação, juntamente com outras propriedades geométricas relevantes. Nessa planificação, constam polígonos não semelhantes, um pentágono e um retângulo, por exemplo, e, com estas observações, introduziremos a definição de Polígono e Poliedro.

Polígono é toda linha fechada formada apenas por segmentos de reta que não se cruzam.

Um **poliedro** é uma figura espacial composta por um número finito de polígonos planos, denominados faces, que obedecem às seguintes condições:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Os elementos de um poliedro são: vértice, face e aresta.

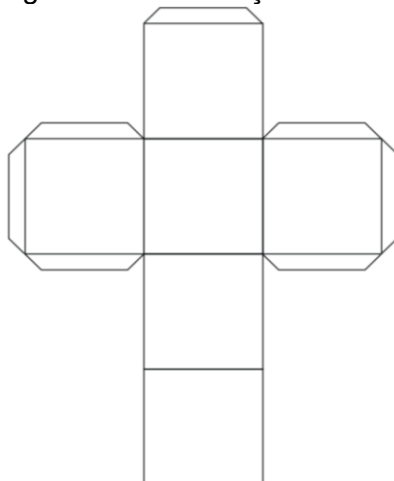
Vértices: “pontas” (encontro das arestas).

Faces: polígonos (regiões planas).

Arestas: “quinas” (encontro das faces)

Planificações trabalhadas e suas especificidades:

Figura 11: Planificação do cubo



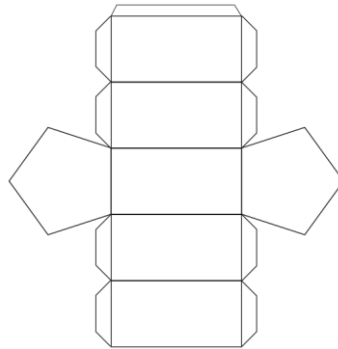
Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do cubo da figura acima, temos um polígono, o quadrilátero, em específico o quadrado. Sendo assim, enunciaremos suas definições.

Quadrilátero é também chamado de polígono que possui quatro lados. A soma dos ângulos internos é sempre 360 graus.

Quadrado é um polígono de quatro lados de igual comprimento, onde todos os ângulos internos são retos (90 graus). Ele é um caso especial de quadrilátero.

Figura 12: Planificação do prisma reto de base pentagonal.



Fonte: Ministério da Educação, 2007

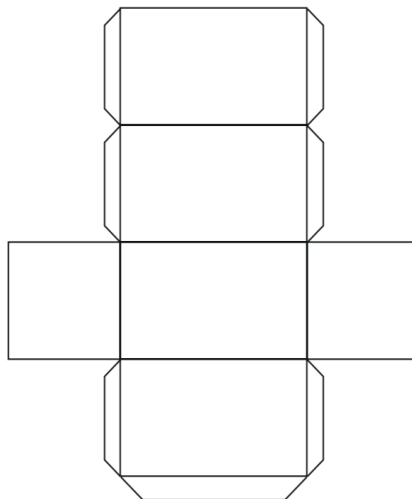
Na planificação do poliedro da figura acima, temos dois polígonos, o quadrilátero – que também é um retângulo - e o pentágono. Sendo assim, enunciaremos suas definições.

Quadrilátero é também chamado de polígono que possui quatro lados. A soma dos ângulos internos é sempre 360 graus.

Retângulo é um quadrilátero com ângulos retos, mas os lados não precisam ser iguais.

Pentágono é um polígono de cinco lados e a soma dos seus ângulos internos é sempre 540 graus.

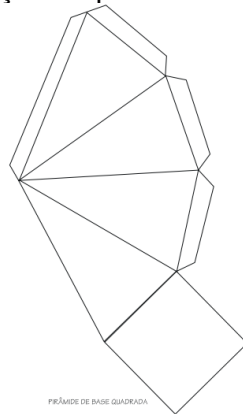
Figura 13: Planificação do prisma reto com base quadrangular



Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do prisma da figura acima, temos dois polígonos, um quadrado e um retângulo.

Figura 14: Planificação da pirâmide de base quadrangular

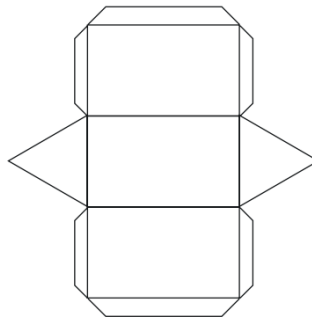


Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do poliedro da figura acima, temos dois polígonos, o quadrilátero – que também é um quadrado - e o triângulo.

Triângulo é um polígono de três lados e a soma dos seus ângulos internos precisa resultar em 180 graus.

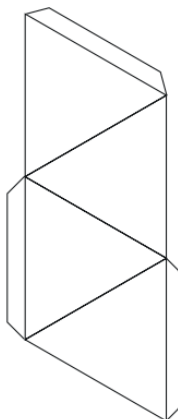
Figura 15: Planificação do prisma de base triangular



Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do poliedro da figura acima, temos dois polígonos, o quadrilátero – que também é um retângulo - e o triângulo.

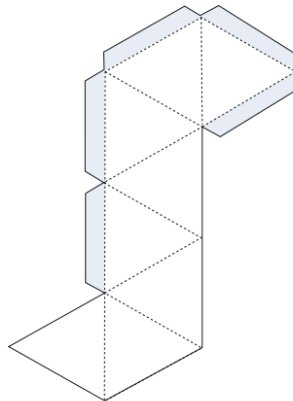
Figura 16: Planificação da pirâmide de base triangular - tetraedro



Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do poliedro da figura acima, temos um polígono, o triângulo.

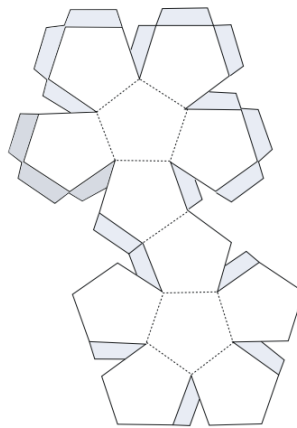
Figura 17: Planificação do octaedro



Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do poliedro da figura acima, temos um polígono, o triângulo.

Figura 18: Planificação do dodecaedro








Fonte: Ministério da Educação, 2007

Na planificação do poliedro da figura acima, temos um polígono, o pentágono.

Após falarmos sobre os polígonos de cada planificação e os poliedros estiverem montados, entregaremos uma tabela para ser preenchida por eles.

Tabela 3: Os oito deltaedros convexos

Sobrenome	Foto	Rostos	Arestas	Vértices
Tetraedro regular		4	6	4
Diamante triangular		6	9	5
Octaedro regular		8	12	6

Diamante pentagonal		10	15	7
Disfenóide amolecido		12	18	8
Prisma triangular triaugmentado		14	21	9
Diamante quadrado giro-alongado		16	24	10
Icosaedro regular		20	30	12

Fonte: WIKIPÉDIA, 2021.

Perceber a Relação de Euler

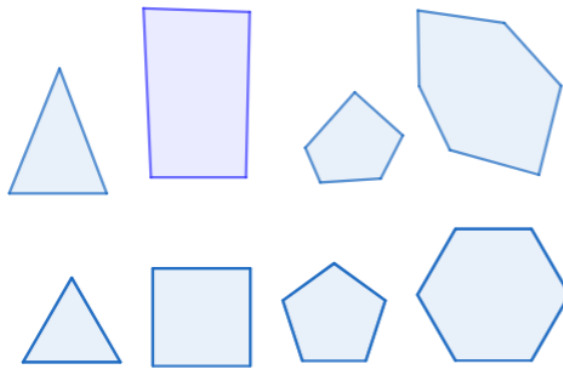
Após os estudantes preencherem a tabela, iremos pedir que tentem estabelecer relações entre as informações da tabela 1; procurando padrões e/ou relações entre as informações preenchidas para que possam compartilhar com a turma e, então verificarmos a validade de cada uma.

A Relação de Euler diz que, em um poliedro convexo, V é o número de vértices, F é o número de faces e A é o número de arestas, então vale a relação: $V + F = A + 2$. Observação: todo poliedro convexo obedece à relação de Euler, já os poliedros côncavos podem obedecê-la ou não.

Polígonos regulares e irregulares

Devemos perguntar/questionar os alunos sobre como ficariam os poliedros montados se colocássemos polígonos “diferentes” na planificação.

Figura 19: Representações de Polígonos



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Polígonos regulares: São aqueles em que todos os lados possuem o mesmo comprimento e todos os ângulos internos são iguais.





Polígonos irregulares: São aqueles em que os lados e os ângulos não são todos iguais.

Essa subdivisão nos ajuda a diferenciar entre figuras que possuem simetria completa e aquelas que não possuem essa uniformidade.

Como consequência, como ficariam os poliedros?

Relações das diagonais

Tabela 4: Polígonos – relação das diagonais

Polígono	Número de lados	Número de diagonais	Relação
			
			
			
			

Fonte: Acervo dos autores, 2025

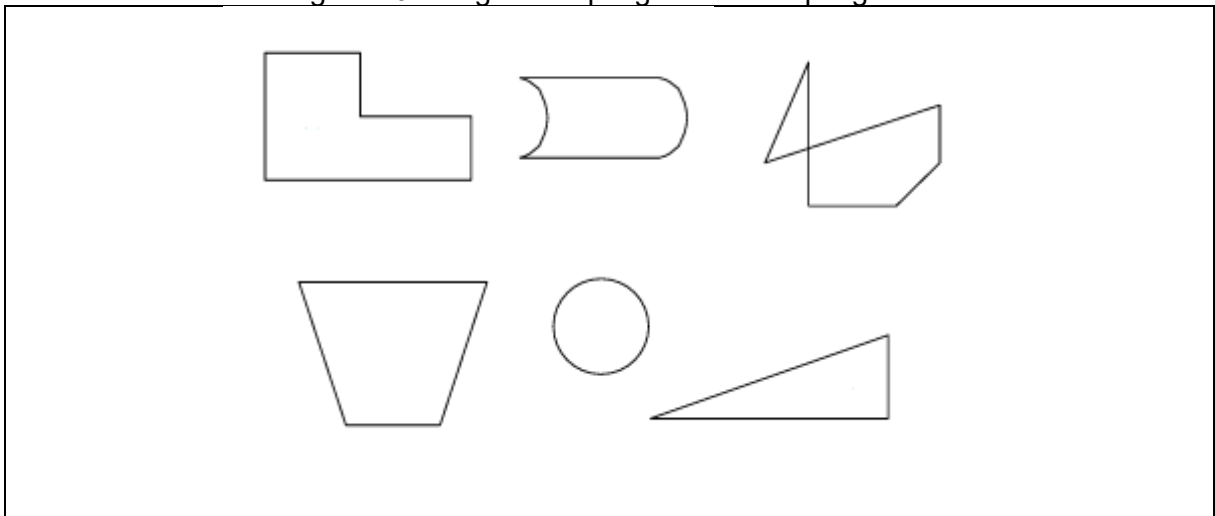
O número de diagonais em um polígono convexo é calculado pela fórmula:

$$d = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Onde d é o número de diagonais, n é o número de lados.

Dando continuidade ao conteúdo da aula, abordaremos alguns conceitos iniciais sobre figuras planas, de acordo com as definições de Euclides. Essas definições básicas ajudarão a compreender melhor as propriedades e características das figuras geométricas que estudaremos ao longo da aula.

Figura 20: Imagens de polígonos e não polígonos



Fonte: Acervo dos autores, 2025

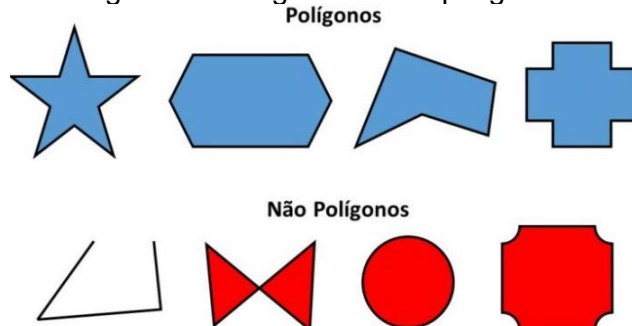
Tabela 5: Tabela para agrupar polígonos e não polígonos

Grupo 1	Grupos 2

Fonte: Acervo dos autores, 2025

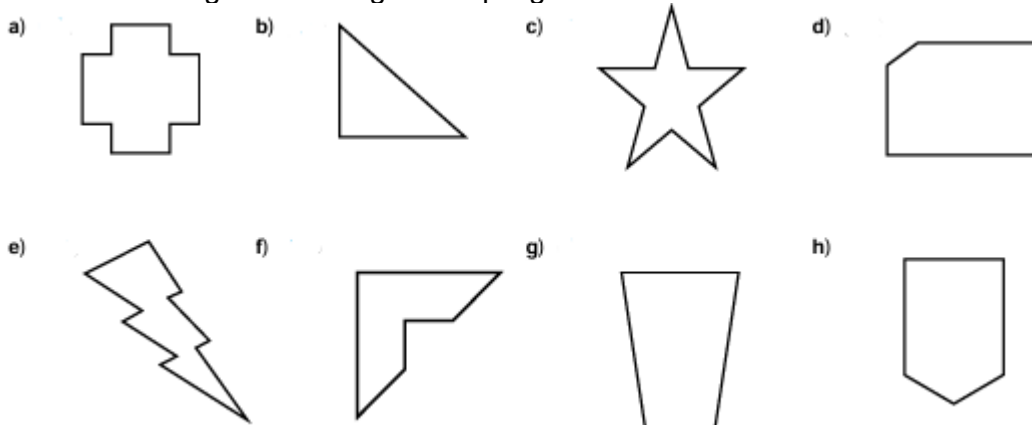
Figuras não poligonais: São aquelas que não satisfazem o conceito de polígono, ou seja, possuem curvas ou não são formadas apenas por segmentos de reta.

Figura 21: Polígonos e não polígonos



Fonte: LER E APRENDER, 2020.

Figura 22: Imagens de polígonos côncavos e convexos



Fonte: Acervo dos autores, 2025

Classifique as imagens acima em dois grupos levando em consideração suas características.

Tabela 6: Tabela para agrupar polígonos convexos e côncavos

Grupo 1	Grupos 2

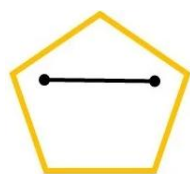
Fonte: Acervo dos autores, 2025

Os polígonos podem ser classificados em duas subdivisões:

Polígonos convexos: Um polígono é dito convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina. Ou seja, um polígono é convexo quando o prolongamento de qualquer um de seus lados não corta o interior da figura.

Polígonos côncavos: Se um polígono não é convexo, diremos que ele é um polígono côncavo ou simplesmente não-convexo.

Figura 23: Polígonos convexos e não convexos



Polígono convexo



Polígono não convexo

Fonte: (MARCIANO E., 2020).

Em seguida apresentaremos a nomenclatura dos principais polígonos.

Tabela 7: Nomenclatura dos polígonos

Número de lados (n)	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Fonte: Acervo dos autores, 2025

(30 minutos)

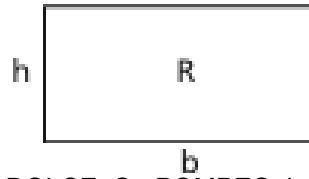
INTERVALO

Após o intervalo, trabalharemos com a ideia inicial relacionada ao cálculo de área de polígonos.

Área: A área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à essa superfície.

Retângulo: Dado um retângulo R de lados b e h , a área A formada por esta figura é dada por:

Figura 24: Relação base e altura



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013

$$A = (\text{medida da base}) \times (\text{medida da altura})$$

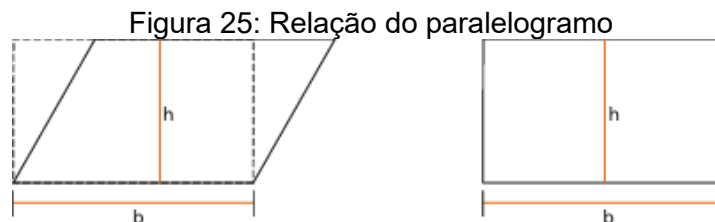
$$A = b \times h$$

Quadrado: Como um quadrado é um tipo particular de retângulo, onde a medida da base é igual a medida da altura (digamos, a), então sua área A é dada por

$$A = a \times a$$

$$A = a^2$$

Paralelogramo: Um retângulo pode ser formado a partir de um paralelogramo não retângulo. Basta cortar uma parte do paralelogramo e reposicioná-la do outro lado, conforme a figura a seguir:



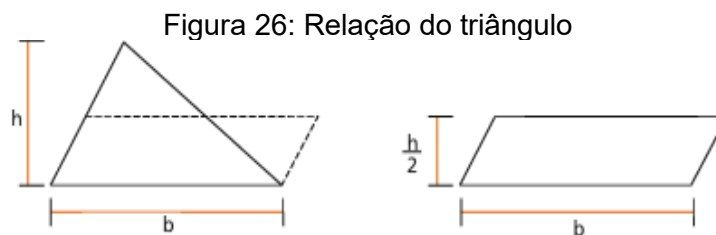
Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013

Isso é possível pois, todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.

Sendo assim,

$$A = b \times h$$

Triângulo: A área de um triângulo é equivalente à de um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$, ou seja, a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo.



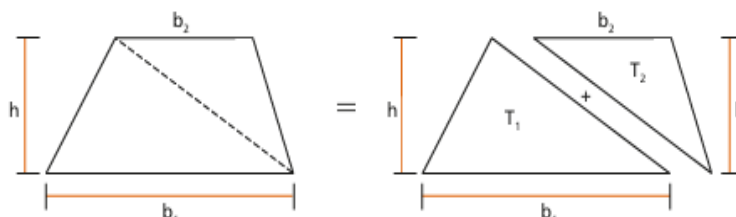
Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013

Logo,

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Trapézio: A área do trapézio é a soma da área de dois triângulos. Sendo B a medida da base maior, b a medida da base menor e h a medida da altura, temos que:

Figura 27: Relação do trapézio



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013

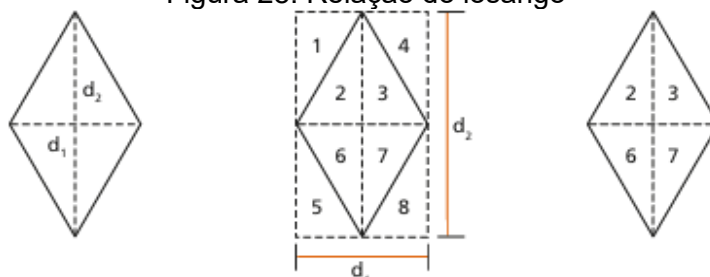
$$A_1 = \frac{b \times h}{2}; A_2 = \frac{B \times h}{2}.$$

Logo:

$$A = \frac{b \times h}{2} + \frac{B \times h}{2} \rightarrow A = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

Losango: Dado um losango de diagonais d_1 e d_2 , conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.

Figura 28: Relação do losango



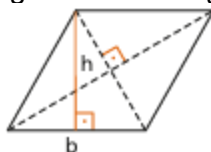
Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013

A partir disso temos que a área do losango é obtida pela área de 4 triângulos. Ou seja:

$$A = A(4 \text{ triângulos}) = \frac{A(8 \text{ triângulos})}{2} \rightarrow A = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Além disso, o losango também é um paralelogramo e sua área pode ser obtida da mesma forma que a do paralelogramo. Sendo:

Figura 29: Losango

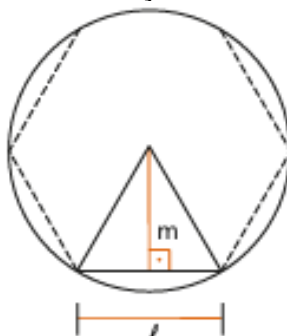


Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013

$$A = b \times h$$

Polígono Regular: Sendo:

$n = N^\circ \text{ de lados}$ $m = \text{medida da apótema}$ $l = \text{medida do lado}$
 Figura 30: Relação do hexágono



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N. , 2013

Podemos decompor o polígono regular em n triângulos de base l e altura m .

Então:

$$At = n \times \text{Área do triângulo}$$

$$At = n \times \frac{l \times m}{2}$$

Avaliação:

Não será realizada uma avaliação formal. Os professores farão um acompanhamento contínuo, observando a participação dos alunos, a compreensão dos conceitos e o envolvimento nas atividades em grupo. A análise será feita com base nas interações, nas argumentações apresentadas e na execução das tarefas propostas, servindo como base para orientar futuras intervenções pedagógicas.

Lista de Exercícios:

01. (ENEM PPL 2020) Um estudante, morador da cidade de Contagem, ouviu dizer que nessa cidade existem ruas que formam um hexágono regular. Ao pesquisar em um sítio de mapas, verificou que o fato é verídico, como mostra a figura.

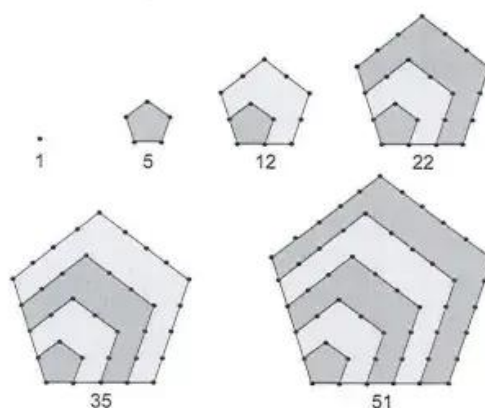


Ele observou que o mapa apresentado na tela do computador estava na escala 1:20.000. Nesse instante, mediu o comprimento de um dos segmentos que formam os lados desse hexágono, encontrando 5 cm.

Se esse estudante resolver dar uma volta completa pelas ruas que formam esse hexágono, ele percorrerá, em quilômetro,

- a) 1 b) 4 c) 6 d) 20 e) 24

02. (ENEM 2023) Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.

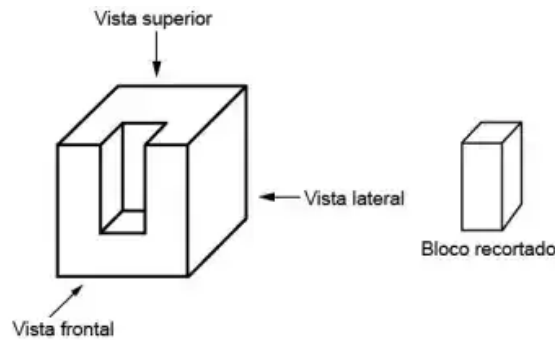


O oitavo número pentagonal é:

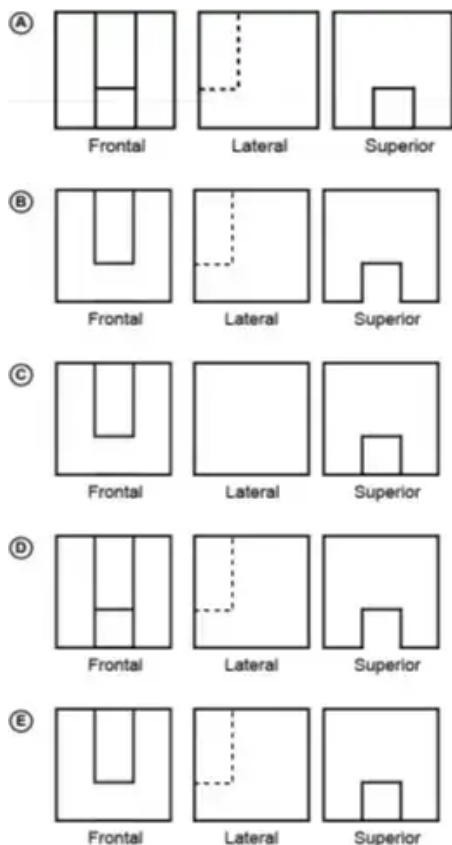
- a) 59 b) 83 c) 86 d) 89 e) 92

03. (ENEM Digital 2020) No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura. Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro,

as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.



As vistas frontal, lateral e superior que melhor representam o desenho entregue ao torneiro são:



Gabarito: Resposta e)

04. (ENEM 2021) O projeto de um contêiner, em forma de paralelepípedo reto retangular, previa a pintura dos dois lados (interno e externo) de cada uma das quatro paredes com tinta acrílica e a pintura do piso interno com tinta epóxi. O construtor havia pedido, a cinco fornecedores diferentes, orçamentos das tintas necessárias, mas, antes de iniciar a obra, resolveu mudar o projeto original, alterando o comprimento e a largura para o dobro do originalmente previsto, mantendo inalterada

a altura. Ao pedir novos orçamentos aos fornecedores, para as novas dimensões, cada um deu uma resposta diferente sobre as novas quantidades de tinta necessárias. Em relação ao previsto para O projeto original, as novas quantidades de tinta necessárias informadas pelos fornecedores foram as seguintes:

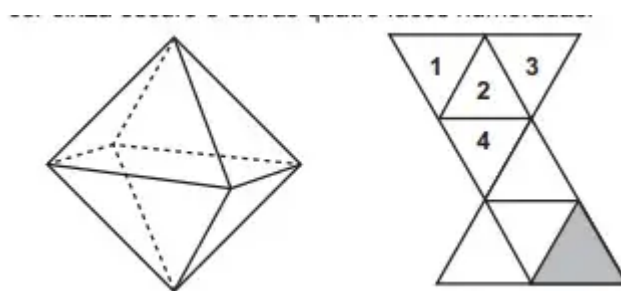
- Fornecedor I: “O dobro, tanto para as paredes quanto para o piso.”
- Fornecedor II: “O dobro para as paredes e quatro vezes para o piso.”
- Fornecedor III: “Quatro vezes, tanto para as paredes quanto para o piso.”
- Fornecedor IV: “Quatro vezes para as paredes e o dobro para o piso.”
- Fornecedor V: “Oito vezes para as paredes e quatro vezes para o piso.”

Analisando as informações dos fornecedores, o construtor providenciará a quantidade adequada de material. Considere a porta de acesso do contêiner como parte de uma das paredes.

Qual dos fornecedores prestou as informações adequadas, devendo ser o escolhido pelo construtor para a aquisição do material?

- a) I **b) II** c) III d) IV e) V

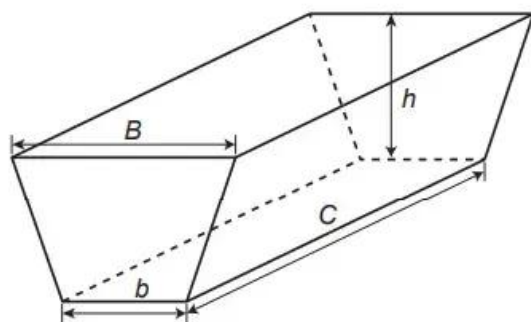
05. (ENEM 2021) Num octaedro regular, duas faces são consideradas opostas quando não têm nem arestas, nem vértices em comum. Na figura, observa-se um octaedro regular e uma de suas planificações, na qual há uma face colorida na cor cinza escuro e outras quatro faces numeradas.



Qual(is) face(s) ficará(ão) oposta(s) à face de cor cinza escuro, quando o octaedro for reconstruído a partir da planificação dada?

- a) 1, 2, 3 e 4 b) 1 e 3 c) 1 d) 2 **e) 4**

06. (ENEM 2014) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denominada silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:

b - largura do fundo

B - largura do topo

C - comprimento do silo

h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

a) 110

b) 125

c) 130

d) 220

e) 260

Relatório da aula ministrada – 07/06/2025

No sábado, dia 07 de junho, realizamos o quinto encontro do Promat. Iniciamos a aula às 8h04 com a retomada de uma questão sobre regra de três, a qual havia gerado dúvidas na aula anterior. Para esclarecer o conteúdo, apresentamos uma nova abordagem para a resolução do exercício. Em seguida, atendendo ao pedido de um aluno, resolvemos a segunda questão da lista de exercícios para casa. Durante essa resolução, surgiram novamente dúvidas quanto à aplicação da regra de três no contexto proposto, o que acabou gerando um atraso. Diante disso, ficou decidido com a turma que o conteúdo seria retomado após o intervalo.

Na sequência, dividimos os 25 alunos em seis grupos de quatro integrantes, restando um aluno que optou por desenvolver as atividades individualmente, mesmo tendo a possibilidade de se juntar a um grupo com cinco membros. Distribuímos planificações de diferentes poliedros e solicitamos que os construíssem utilizando tesoura e cola — materiais que havíamos solicitado previamente e que, mesmo assim, foram disponibilizados a todos.

Após a construção, pedimos que identificassem o nome de cada poliedro e quais polígonos compunham suas faces. Observamos que alguns alunos conseguiram reconhecer os polígonos, mas tiveram dificuldade em nomear os poliedros.

Em seguida, nomeamos corretamente todos os poliedros apresentados e revisamos os polígonos envolvidos em suas faces. Distribuímos uma tabela contendo

os deltaedros convexos, que são formados exclusivamente por faces triangulares e são convexos. Os alunos deveriam preenchê-la com o número de faces, arestas e vértices de cada figura, com o objetivo de, posteriormente, descobrir a fórmula de Euler. Notamos que os alunos ainda não conheciam essa fórmula, mas conseguiram perceber relações aritméticas entre as figuras.

Após o intervalo, apresentamos a fórmula de Euler e realizamos a “prova real” em cada poliedro, reforçando a relação entre os elementos. Em seguida, abordamos os polígonos regulares e irregulares e o conceito de diagonais. O professor supervisor contribuiu com uma explicação visual e imaginativa, utilizando a própria sala para ilustrar as diagonais de um poliedro.

Distribuímos uma nova tabela para que os alunos relacionassem o número de lados com o número de diagonais em diferentes polígonos regulares, a fim de identificar uma fórmula. Muitos alunos encontraram dificuldades tanto para descobrir a quantidade de diagonais quanto para perceber a relação com o número de lados. Após as tentativas, apresentamos a fórmula e fizemos sua comprovação no quadro. Mesmo durante outra atividade, alguns alunos ainda nos procuraram individualmente para esclarecer dúvidas sobre a atividade anterior.

Na última parte do encontro, entregamos tabelas com figuras poligonais e não poligonais, além de polígonos convexos e não convexos. A proposta era que os alunos identificassem os critérios de agrupamento das figuras sem informações prévias, o que os incentivaria a descobrir, por si mesmos, as características de cada grupo. Embora alguns alunos tenham feito a separação corretamente, muitos não sabiam explicar a diferença entre polígonos convexos e não convexos. Conduzimos a reflexão com base no critério do segmento de reta que atravessa o interior da figura. Isso os ajudou a agrupar os polígonos com mais segurança. Relembramos o conceito de polígono, e então definimos os convexos e côncavos. O professor supervisor ainda complementou explicando que um polígono é não convexo (côncavo) quando possui pelo menos um ângulo interno maior que 180° .

Nossa atuação foi positiva, principalmente pela organização prévia dos materiais e pela divisão das atividades entre os professores, que nos permitiu acompanhar melhor os grupos. O que funcionou foi a construção dos poliedros com planificações, pois os alunos se mostraram motivados para montar as figuras, além de despertar curiosidade sobre seus nomes e propriedades. Também foi positiva a

aplicação prática da fórmula de Euler, pois possibilitou aos estudantes compreenderem melhor a relação entre vértices, arestas e faces.

Por outro lado, percebemos que o tempo gasto na resolução da regra de três no início comprometeu a programação do restante da aula, gerando atraso. Além disso, muitos alunos apresentaram dificuldade em identificar diagonais e a fórmula correspondente, o que indica que precisaríamos de mais exemplos concretos ou manipuláveis antes da conceituação.

O que faríamos diferente seria planejar a revisão de exercícios de forma mais objetiva, organizando previamente quais questões revisar em cada encontro para não comprometer o tempo das atividades propostas. Também buscaríamos inserir exemplos com materiais concretos, como palitos ou canudos, para construção de diagonais antes de partir para o conceito formal e sua fórmula.

AULA 06 (14/06/2025) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Triângulos e Áreas de Polígonos 14/06/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Compreender os princípios geométricos dos triângulos e suas aplicações no cálculo de áreas de polígonos, desenvolvendo habilidades de investigação matemática e resolução de problemas.

Objetivos específicos:

- Classificar triângulos quanto aos lados e ângulos, utilizando critérios geométricos.
- Deduzir a fórmula da área do triângulo a partir de manipulações concretas.
- Resolver problemas contextualizados envolvendo áreas de polígonos.

Conteúdo: Triângulos, área de polígonos.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

O conteúdo sobre triângulos será introduzido pela via da investigação matemática. Braumann (2002) *apud* Charleaux; De Souza (2019) destaca a

importância de colocar o aluno no centro de seu aprendizado, atuando como sujeito ativo na construção de seu conhecimento. Qualquer que seja o nível de ensino, aprender matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática.

A proposta inicial é dividir a turma em duplas e entregar aos alunos uma folha sulfite A4 e pedir que fazendo dois cortes com uma tesoura eles formem triângulos até acabar a folha. Basicamente, seguindo o passo a passo abaixo:

- Recortar um triângulo qualquer usando apenas dois cortes na folha.
- Repetir esse processo até esgotar todas as possibilidades de triângulos a serem feitos.
- Classificar e organizar os triângulos.
- Anotar, ao longo do processo, suas hipóteses e depois suas conclusões.

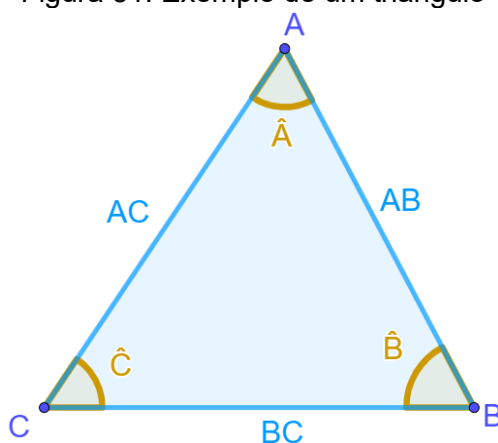
O propósito da atividade é que depois que eles cortarem os triângulos, eles busquem semelhanças e/ou relações entre os triângulos. Conforme as semelhanças forem acontecendo, iremos associar com o conteúdo proposto. Ou seja, utilizaremos da investigação para apresentar o conteúdo sobre triângulos.

Após a realização da dinâmica de abertura que busca a investigação da classificação dos triângulos com recortes, vamos projetar alguns conceitos sobre triângulo, para concretizar melhor o entendimento, assim como exemplos, sendo a seguir:

Triângulos e seus elementos:

O triângulo é um polígono de três lados.

Figura 31: Exemplo de um triângulo



Fonte: Acervo dos autores, 2025

No triângulo ABC da figura, podemos destacar os seguintes elementos:

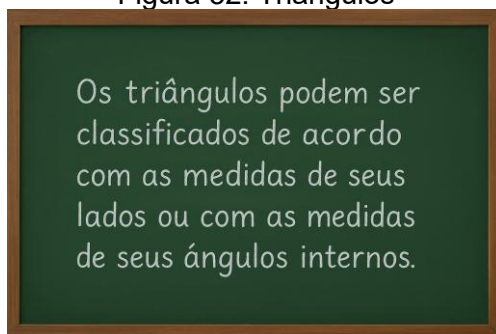
- Os pontos A , B e C , que são os **vértices** do triângulo ABC ;

- Os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} que são os lados do triângulo ABC ;
- Os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} que são os **ângulos internos** do triângulo ABC .

Utilizamos o símbolo Δ para indicar um triângulo. Assim, o triângulo ABC pode ser representado por ΔABC .

Adiante destas apresentações, falaremos sobre as classificações dos triângulos, já comentado brevemente na atividade de investigação.

Figura 32: Triângulos



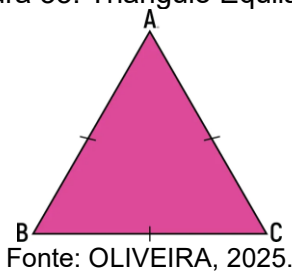
Fonte: Acervo dos autores, 2025

Classificando os triângulos quanto aos lados:

Considerando as medidas dos lados de um triângulo, temos a seguinte classificação:

- O triângulo com os três lados congruentes, os três lados com a mesma medida, é chamado **triângulo equilátero**.

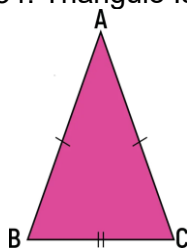
Figura 33: Triângulo Equilátero



$$AB \equiv AC \equiv BC$$

- O triângulo com apenas dois lados congruentes, dois lados com a mesma medida, é chamado **triângulo isósceles**.

Figura 34: Triângulo Isósceles

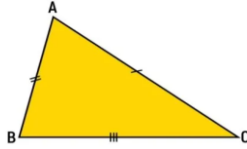


Fonte: BRASIL ESCOLA, 2025.

$$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$$

- O triângulo com os três lados de medidas diferentes é chamado **triângulo escaleno**.

Figura 35: Triângulo escaleno



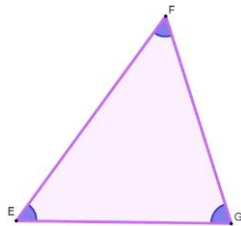
Fonte: OLIVEIRA, 2025.

Classificando os triângulos quanto aos ângulos:

Quando consideramos as medidas dos ângulos internos de um triângulo, temos a seguinte classificação:

- O triângulo com os três ângulos internos agudos (menores que 90°) é chamado **triângulo acutângulo**.

Figura 36: Triângulo Acutângulo

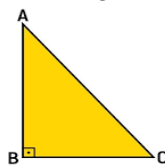


Fonte: BRASIL ESCOLA, 2025.

$$\hat{E} < 90^\circ, \hat{F} < 90^\circ \text{ e } \hat{G} < 90^\circ$$

- O triângulo com um ângulo interno reto, a medida igual a 90° , é chamado **triângulo retângulo**. Os outros ângulos internos são agudos.

Figura 37: Triângulo Retângulo

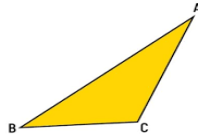


Fonte: OLIVEIRA, 2025.

$$\hat{A} < 90^\circ, \hat{B} = 90^\circ \text{ e } \hat{C} < 90^\circ$$

- O triângulo com um ângulo obtuso, a medida é maior que 90° e menor que 180° , é chamado **triângulo obtusângulo**. Os outros dois ângulos internos são agudos.

Figura 38: Triângulo Obtusângulo



Fonte: OLIVEIRA, 2025.

$$\hat{A} < 90^\circ, \hat{B} < 90^\circ \text{ e } 90^\circ < \hat{C} < 180^\circ$$

Semelhança de Triângulos

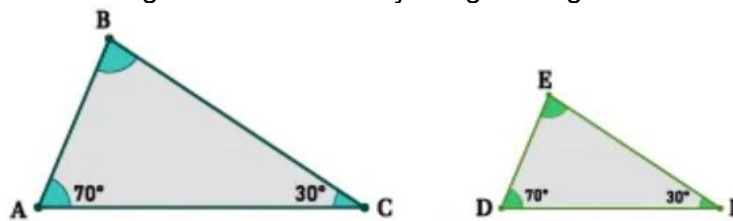
Semelhança de triângulos é a situação em que dois triângulos têm seus ângulos correspondentes com mesma medida e seus lados proporcionais.

Existem critérios de semelhança que nos auxiliam a identificar triângulos semelhantes.

Os casos de semelhança são:

- AA (Ângulo-Ângulo): Dois ângulos correspondentes iguais garantem a semelhança.

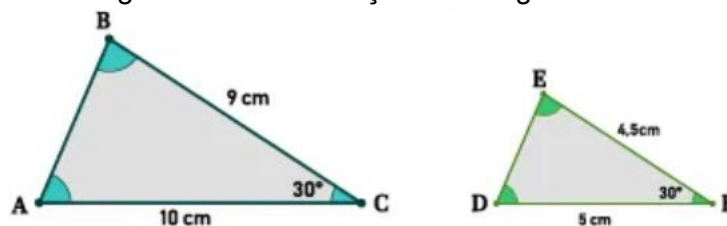
Figura 39: Semelhança Ângulo-Ângulo.



Fonte: FRANCO *apud* OLIVEIRA, 2025.

- LAL (Lado-Ângulo-Lado): Dois lados proporcionais e o ângulo entre eles congruente garantem a semelhança.

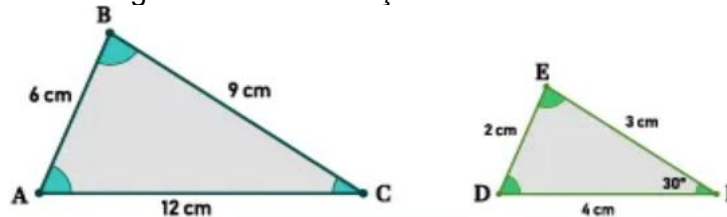
Figura 40: Semelhança Lado-Ângulo-Lado.



Fonte: FRANCO *apud* OLIVEIRA, 2025.

- LLL (Lado-Lado-Lado): Três lados proporcionais garantem a semelhança.

Figura 41: Semelhança Lado-Lado-Lado.



Fonte: FRANCO *apud* OLIVEIRA, 2025.

Esses critérios permitem verificar a semelhança sem medir todos os elementos dos triângulos.

Dois triângulos são congruentes quando têm ângulos e lados correspondentes com as mesmas medidas.

INTERVALO

Após o intervalo, trabalharemos com a ideia inicial relacionada ao cálculo de área de um quadrado e de um paralelogramo para chegar à fórmula da área do triângulo, e assim, utilizar o triângulo para calcular polígonos.

Para introduzirmos a abordagem investigativa, iremos adaptar uma atividade de Mendes (2009), em que ele sugere a dedução da fórmula da área do triângulo a partir de recortes de uma folha, como está especificado abaixo.

Passo a Passo:

Passo 1: Pegue uma folha de papel retangular.

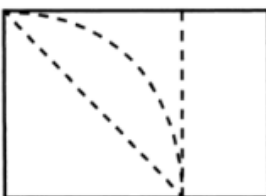
Figura 42: Passo 1



Fonte: MENDES., 2009.

Passo 2: A partir dessa folha, experimente construir um quadrado. Sugerimos que você dobre o papel, partindo de dois elementos do quadrado: o seu lado e a sua diagonal. Recorte a parte que sobra para formar o quadrado exato.

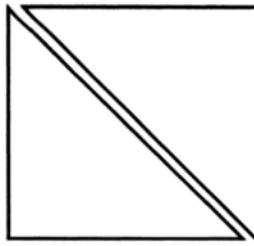
Figura 43: Passo 2



Fonte: MENDES., 2009.

Passo 3: Nesse momento você deve ter percebido que a diagonal do quadrado representa a bissetriz que divide o ângulo reto (90°) em duas partes iguais, gerando dois ângulos de 45° . Recorte a figura bem na direção da diagonal de modo a obter duas figuras novas.

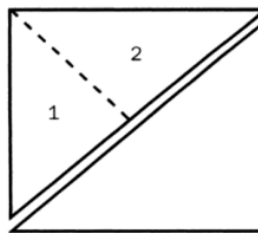
Figura 44: Passo 3



Fonte: MENDES., 2009.

Passo 4: Agora, recorte um dos triângulos em dois triângulos iguais. Como na imagem abaixo.

Figura 45: Passo 4



Fonte: MENDES., 2009.

Qual a relação entre as áreas dos triângulos obtidos? Qual a relação entre a área de um desses triângulos menores e o triângulo anterior (antes de cortar)?

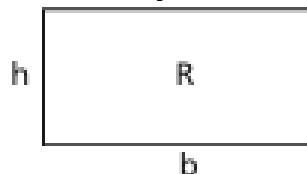
Qual a relação entre a área desse triângulo menor e o quadrado inicial (Figura 3 antes de cortar)?

Durante a atividade iremos andar pela sala para orientá-los e a partir das respostas obtidas iremos formalizar o conteúdo de áreas de polígonos.

Área: A área de uma superfície limitada é um número real positivo associado à essa superfície.

Retângulo: Dado um retângulo R de lados b e h , a área A formada por esta figura é dada por:

Figura 46: Relação base e altura



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013.

$$A = (\text{medida da base}) \times (\text{medida da altura})$$

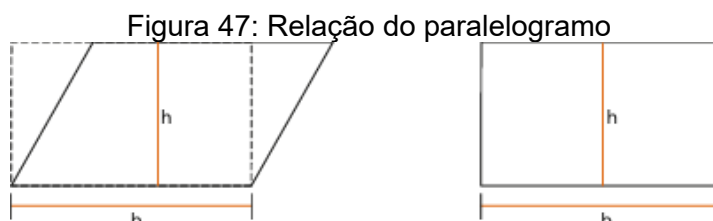
$$A = b \times h$$

Quadrado: Como um quadrado é um tipo particular de retângulo, onde a medida da base é igual a medida da altura (digamos, a), então sua área A é dada por

$$A = a \times a$$

$$A = a^2$$

Paralelogramo: Um retângulo pode ser formado a partir de um paralelogramo não retângulo. Basta cortar uma parte do paralelogramo e reposicioná-la do outro lado, conforme a figura a seguir:



Fonte: (DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013,

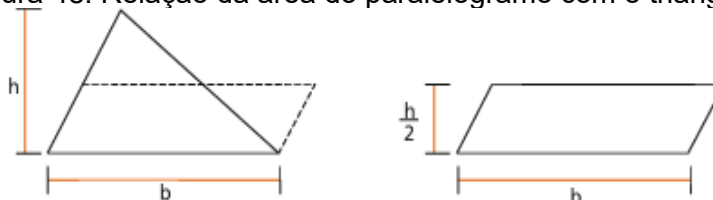
Isso é possível pois, a área de todo paralelogramo é equivalente a área de um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.

Sendo assim,

$$A = b \times h$$

Triângulo: A área de um triângulo é equivalente a de um paralelogramo cuja base mede b e altura mede $\frac{h}{2}$, ou seja, a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo de mesma base e metade de sua altura.

Figura 48: Relação da área do paralelogramo com o triângulo.



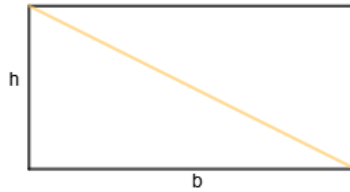
Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013.

Logo,

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Podemos verificar também que, ao traçarmos uma diagonal em um retângulo iremos obter dois triângulos congruentes, sendo que a área de cada triângulo é exatamente a metade da área do retângulo.

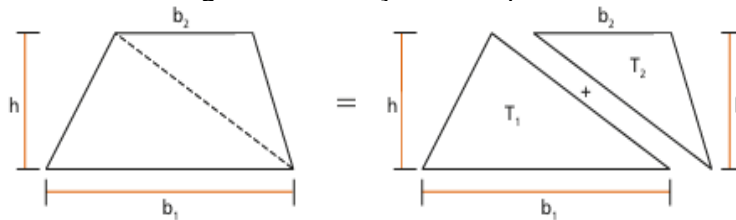
Figura 49: Relação do triângulo com o retângulo



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013.

Trapézio: A área do trapézio é a soma da área de dois triângulos. Sendo B a medida da base maior, b a medida da base menor e h a medida da altura, temos que:

Figura 50: Relação do trapézio



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013.

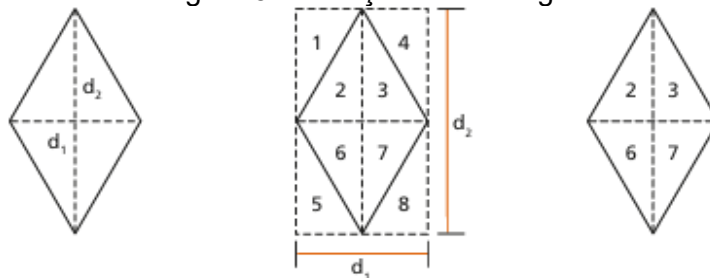
$$A_1 = \frac{b \times h}{2}; A_2 = \frac{B \times h}{2}.$$

Logo:

$$A = \frac{b \times h}{2} + \frac{B \times h}{2} \rightarrow A = \frac{(B + b) \times h}{2}.$$

Losango: Dado um losango de diagonais d_1 e d_2 , conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais.

Figura 51 :Relação do Losango



Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013.

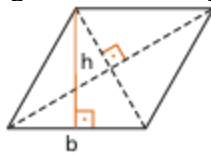
A partir disso temos que a área do losango é obtida pela área de 4 triângulos.

Ou seja:

$$A = A(4 \text{ triângulos}) = \frac{A(8 \text{ triângulos})}{2} \rightarrow A = \frac{d_1 \times d_2}{2}$$

Além disso, o losango também é um paralelogramo e sua área pode ser obtida da mesma forma que a do paralelogramo. Sendo:

Figura 52: Losango

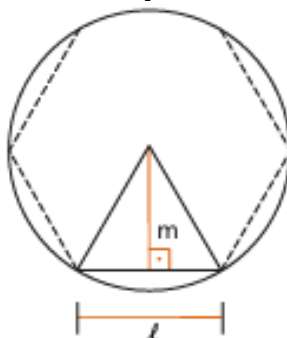


Fonte: DOLCE, O.; POMPEO J. N., 2013.

$$A = b \times h$$

Polígono Regular: Sendo:

$$n = \text{N}^\circ \text{ de lados} \quad \left| \begin{array}{l} m = \text{medida da apótema} \\ \text{Figura 53: Relação do hexágono} \end{array} \right. \quad l = \text{medida do lado}$$



Fonte: Acervo dos autores, 2025

Podemos decompor o polígono regular em n triângulos de base l e altura m .

Então:

$$At = n \times \text{Área do triângulo}$$

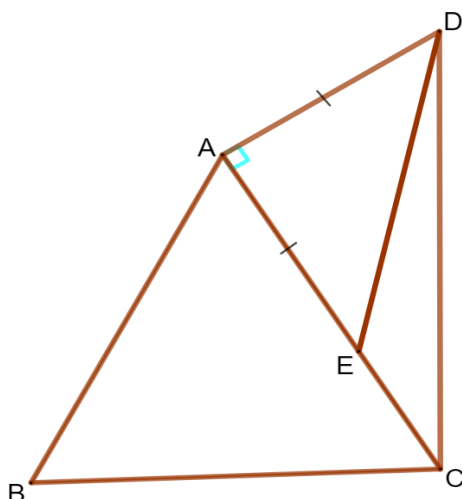
$$At = n \times \frac{l \times m}{2}$$

Avaliação:

Observação da participação ativa e cooperação nos grupos, a clareza nas justificativas e argumentações matemáticas e a capacidade de representar expressões de forma geométrica e simbólica.

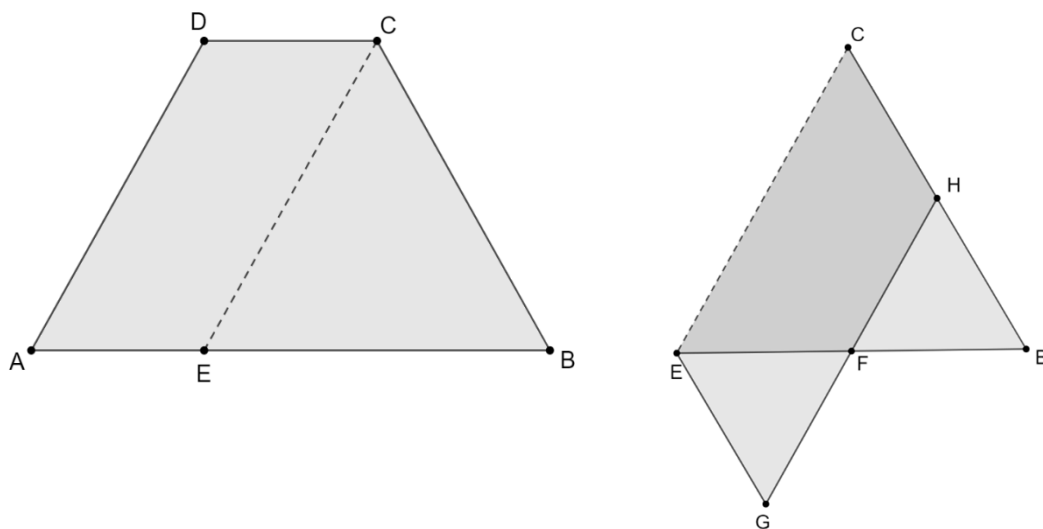
Lista de Exercícios:

- 1) Utilizando uma régua e um transferidor, classifique quanto aos lados e quanto aos ângulos os triângulos ABC, ADE, CDE.



Resolução: $\triangle ABC$: equilátero e acutângulo; $\triangle ADE$: isósceles e retângulo; $\triangle CDE$: escaleno e obtusângulo.

2) (Obmep 2015) O trapézio ABCD foi dobrado ao longo do segmento CE, paralelo a seguir AD, como na figura. Os triângulos EFG e BFG são equiláteros, ambos com lados de 4 cm de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio?



- a) 16 cm b) 18 cm c) 20 cm d) 24 cm e) 32 cm

Resolução: Primeiro observamos que $AD = EC$, por serem lados opostos do paralelogramo AECD. Após a dobradura, o segmento AD ocupou a posição representada pelo segmento GH; logo, os segmentos EC e HG são paralelos e tais que $EC = AD = GH = GF + FH = 4 + 4 = 8$ cm. Também valem as igualdades $DC = AE = EG = 4$ cm. Além disso, entendendo que os triângulos EFG e BFH são equiláteros, temos as seguintes relações:

$$\angle CEB = \angle HFB = 60^\circ;$$

$$\angle EBC = \angle FBH = 60^\circ;$$

$$\angle ECB = 180^\circ - \angle CEB - \angle EBC = 60^\circ;$$

Assim, o triângulo EBC é equilátero, de lado $EB = EF + FB = 8 \text{ cm}$. O perímetro do trapézio $ABCD$ é, portanto, $AE + EB + BC + DC + AD = 4 + 8 + 8 + 4 + 8 = 32 \text{ cm}$.

3) (Colégio Militar/RJ 2015) Em um triângulo ABC , os pontos D e E pertencem, respectivamente, aos lados AB e AC e são tais que $DE \parallel BC$. Se F é um ponto de AB tal que $EF \parallel CD$ e as medidas de AF e FD são, respectivamente, 4 e 6, a medida do segmento DB é:

- a) 15 b) 10 c) 20 d) 16 e) 36

4) (ENEM 2021) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R\$0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

- um triângulo equilátero de lado 12 cm;
- um quadrado de lado 8 cm;
- um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;
- um hexágono regular de lado 6cm;
- um círculo de diâmetro 10 cm;

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R\$0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

Use 3 como aproximação para π e use 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um

- a) Triângulo b) Quadrado c) Retângulo
d) Hexágono e) Círculo

Resolução: Calculando as áreas das figuras

5) Na tabela a seguir, são apresentadas medidas dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , expressas em metros, em 5 situações.

Os pontos A , B e C não estão alinhados.

	I	II	III	IV	V
AB	2	3	2	4	4
BC	3	1,5	3	4	4
AC	6	4	4	4	6

Faça o que é pedido em cada item e verifique com um colega se a resposta é única.

- a) Verifique para quais medidas de segmentos em uma mesma coluna é possível construir o triângulo ABC.
- b) Construa os triângulos com régua e compasso.
- c) Meça os ângulos de cada triângulo e escreva as medidas em graus.
 - Quantas soluções são possíveis em cada caso?
 - Quantos triângulos isósceles com o lado não-congruente medindo 6 cm é possível construir?

Relatório da aula ministrada – 14/06/2025

No dia 14 de junho de 2025, começamos a aula às 8h04min com 16 alunos presentes. Iniciamos as atividades do encontro seis entregando uma folha A4 para realizarem a atividade de recortar os triângulos fazendo apenas dois cortes na folha. Deixamos desenvolverem até às 09h, para que investigassem as relações dos triângulos em relação aos seus lados, ângulos e semelhanças. Na atividade de investigação, a terceira parte, na qual os alunos compartilham seus resultados, eles tiveram receio de compartilhar as conclusões, pois tinham ficado com dúvidas sobre o encaminhamento das atividades.

Os estagiários induziram as ideias para o compartilhamento dos resultados e isso trouxe a oportunidade de apresentar as formalizações das definições sobre as classificações dos triângulos. Passados 30 minutos, definimos brevemente todos as definições por slides.

Após o intervalo, entregamos novas folhas sulfite junto com um roteiro para desenvolver a atividade em que se relacionavam as áreas dos triângulos e dos quadrados. A ideia inicial era trazer o método intuitivo de comparar a área do triângulo com metade da área do quadrado. O desenvolvimento dos alunos trouxe uma comparação entre as áreas, mas poucos desenvolveram a fórmula para calcular a área das formas poligonais. Seguimos com a explicação deste conteúdo e abrimos exposição dos métodos de relacionar as áreas dos polígonos com triângulos. Durante esta explicação, notamos o cansaço entre os alunos e a pouca compreensão das ideias matemáticas envolvidas no conteúdo. Reforçamos aos alunos sobre que o

conhecimento deles é mais importante que o desenvolvimento da aula, influenciando a expressão das suas dúvidas. Nenhum aluno demonstrou dúvidas.

A última explicação sobre relação de triângulos com polígonos trouxera uma fórmula geral para todos os polígonos regulares. Nesta resolução, tivemos dificuldades em mostrar aos alunos que isso vale para todos os polígonos regulares ao invés de somente o hexágono. Concluindo a programação com 20 minutos sobrando para o fim da aula, pedimos aos alunos desenvolverem exercícios da lista de exercícios. Percebemos sobre as carteiras dos alunos, que muitos tinham dificuldade em resolvê-las, em que foi qualitativo o nosso auxílio das atividades com eles. Encerramos o encontro previsto as 11h40, e desejamos que todos voltassem para próxima aula.

Avaliamos nossa atuação como positiva em relação ao planejamento e organização prévia dos materiais, mas percebemos que o desenvolvimento das atividades não ocorreu conforme o esperado. Um dos limites identificados foi a dificuldade dos alunos em compartilhar suas conclusões na investigação inicial, possivelmente pelo receio de errar ou por não terem compreendido totalmente a proposta. Outro limite foi a explicação sobre a fórmula geral de áreas dos polígonos regulares, que não ficou suficientemente clara para os estudantes, pois muitos restringiram a ideia ao hexágono.

Por outro lado, a atividade prática de recorte de triângulos mostrou-se uma boa atividade, pois aproximou os alunos do conteúdo de forma concreta e investigativa, além de possibilitar discussões sobre classificação dos triângulos. Também foi produtivo o momento de resolução de exercícios, pois conseguimos auxiliar individualmente os estudantes em suas dificuldades específicas.

O que faríamos diferente seria planejar momentos de socialização mais estruturados durante as investigações, incentivando os alunos a compartilharem mesmo que não tenham certeza das conclusões, além de elaborar exemplos mais variados para demonstrar a aplicação da fórmula geral em diferentes polígonos regulares. Também organizaríamos melhor o tempo de explicação, deixando pausas para verificarmos a compreensão dos estudantes ao longo da aula.

AULA 07 (21/06/2028) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Expressões Algébricas e Polinômios - 21/06/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Desenvolver a compreensão conceitual e operatória de expressões algébricas por meio da articulação entre geometria e álgebra com material concreto e investigação guiada.

Objetivos específicos:

- Reconhecer e interpretar termos algébricos (monômios, variáveis, coeficientes).
- Representar expressões algébricas a partir de áreas de figuras geométricas planas.
- Compreender operações entre expressões algébricas com o auxílio de manipulação concreta.
- Promover o raciocínio lógico, a argumentação matemática e a cooperação entre os alunos.

Conteúdo: Expressões algébricas e polinômios.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, quadro, giz, envelopes com cartões de polinômios (quadrados e retângulos coloridos), papel quadriculado, lápis, fichas de registro.

Encaminhamento metodológico:

O encaminhamento da aula se iniciará com a resolução de dois exercícios do encontro anterior – sobre triângulos e polígonos – no quadro e um espaço para dúvidas da lista anterior, caso os alunos possuam.

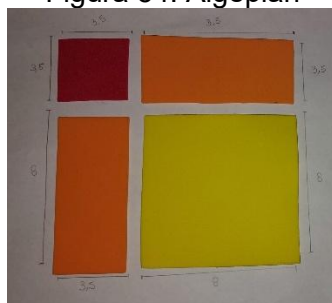
Para introduzirmos o conteúdo desse plano de aula, iremos desenvolver uma atividade com uma abordagem investigativa acerca dos polinômios, utilizando o Instrumento Algeplan.

Tal atividade, foi pensada através de uma abordagem feita por Amorim (2016) que utiliza a geometria de maneira conjunta com a álgebra para desenvolver a investigação e exploração matemática dos alunos. De acordo com Skovsmose (2000) *apud* Amorim (2016) “um cenário de investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações” (p. 6).

A atividade investigativa, iniciará com os alunos em grupos de 3 pessoas, e cada grupo recebendo um material em EVA, como mostra a figura abaixo, que contém

um quadrado maior (amarelo) de 8cm de lado; dois retângulos com 3,5cm de altura e 8cm de largura; um quadrado menor com 3,5cm de lado.

Figura 54: Algeplan



Fonte: Acervo dos autores, 2025

Os alunos receberam o material manipulável e deixaremos que manipulem até surgirem dúvidas do que iremos abordar utilizando tal material. Após isso, iremos realizar alguns questionamentos durante a investigação do material.

“O que vocês observam nessas figuras?”

“Como podem classificá-las?”

“Será que têm relação com áreas?”

“Se o lado do quadrado maior mede oito centímetros e o do quadrado menor, 3,5 centímetros, quanto medirá a área das figuras?”

Transição para Álgebra

“O que acontece se os lados do quadrado maior medirem ‘ x ’ e os lados do quadrado menor medirem ‘ y ’?”

“Quais seriam as novas áreas?”

Espera-se que os alunos cheguem a: *Quadrado grande* = x^2 , *Quadrado pequeno* = y^2 , *Retângulo* = xy

Iremos questionar os alunos de como poderíamos representar **termos negativos**. “E se eu quisesse representar de forma negativa o x^2 como eu faria?”. A ideia é que o lado das peças que possui um adesivo seja a representação dos termos negativos, ou seja, $-x^2$, $-y^2$ e $-xy$.

Figura 55: Representação negativa



Fonte: Acervo dos autores, 2025

Em seguida, iremos propor a montagem com as peças de expressões como:

$$3x^2 - 4xy - y^2$$

Após, os alunos irão montar, discutir no grupo e justificar as escolhas.

Operações entre expressões algébricas

Para a adição das expressões, iremos sugerir que somem 2 quadrados grandes, mais 3 retângulos, mais 3 quadrados pequenos.

A partir disso, faremos uma mediação com as seguintes perguntas: “Quantos termos temos aqui?”, “Como representar isso em forma algébrica?”. Com o objetivo de que os alunos formem essa representação álgebra aqui: $2x^2 + 3xy + 3y^2$.

Para uma representação inversa, iremos propor o seguinte questionamento: “O que acontece se representarmos os polinômios $2x^2 + 4xy - 6y^2$ e $x^2 - 6xy + 10y^2$ e os somarmos?”, “Como podemos representar a nova expressão?”. Após, apresentar expressões algébricas no quadro e pedir que os alunos montem com as peças a partir do resultado obtido.

Intervalo (20 min)

Após o intervalo iremos fazer uma retomada das expressões numéricas.

- Acompanhe um exemplo:

$$\begin{aligned}
 &(-5 + 2)^2 : (-9) - [\sqrt{4} \cdot (-4 - 2) - (-1)^3 \cdot (-5 + 8)] = \\
 &= (-3)^2 : (-9) - [\sqrt{4} \cdot (-6) - (-1)^3 \cdot (+3)] = \rightarrow \text{Resolvemos as operações no} \\
 &\text{interior} \qquad \qquad \qquad \text{dos} \qquad \qquad \qquad \text{parênteses.} \\
 &= (+9) : (-9) - [2 \cdot (-6) - (-1) \cdot (+3)] = \rightarrow \text{Efetuamos as raízes e as} \\
 &\text{potenciações.} \\
 &= (-1) - [-12 - (-3)] = \rightarrow \text{Efetuamos as divisões e as}
 \end{aligned}$$

multiplicações.

$$= -1 - [-12 + 3] =$$

→ Eliminamos os parênteses.

$$= -1 - [-9] =$$

→ Resolvemos as operações no interior dos colchetes.

$$= -1 + 9 =$$

→ Eliminamos os colchetes.

$$= 8$$

Nas expressões numéricas utilizamos a ordem das operações válidas para as expressões com números naturais:

- Primeiro, resolvemos as raízes quadradas e as potenciações na ordem em que aparecem.
- Em seguida, as divisões e as multiplicações na ordem em que aparecem (da esquerda para direita).
- Por último, a adição e subtração algébrica da esquerda para direita.

Além disso, devemos respeitar a eliminação dos sinais de associação (parênteses, colchetes e chaves, nessa ordem).

Expressões algébricas: As expressões matemáticas que apresentam números e letras, ou somente letras, envolvendo operações são denominadas **expressões algébricas**. As letras das expressões algébricas representam números e são chamadas de **variáveis**.

Monômio: Chamamos de monômio a expressão algébrica formada por apenas um termo algébrico. Exemplos:

$$2x$$

$$4xy$$

$$x^2$$

$$43y^3$$

Binômio: Chamamos de binômio a expressão algébrica formada por dois termos algébricos. Exemplos:

$$2x - 5n$$

$$4xy^3 - 12$$

$$z - 7y^3$$

$$x^3y - x^2$$

Trinômio: Chamamos de trinômio a expressão algébrica formada por três termos algébricos. Exemplos:

$$4y + z - 2x$$

$$4xy - 3z^3 + 4$$

$$x^2 + x + 3$$

$$4 + 3y^3 - z$$

Polinômio: Chamamos de polinômios a expressão algébrica formada por dois ou mais termos algébricos. Exemplos:

$$x + y$$

$$y^3 + 5 + z^2$$

$$3x + 4$$

$$zy^2 + z + x^3 + 12 + k$$

Faremos um exemplo onde os alunos irão ter um tempo para responder.

Em um estacionamento há motos e carros. Escreva um polinômio que representa:

a) O número de veículos que estão no estacionamento: *Resposta: Sendo x a quantidade de motos e y a quantidade de carros, temos $x + y$.*

b) O número de rodas dos veículos que estão no estacionamento: *Resposta $2x + 4y$*

Grau de um monômio

Grau de um monômio é a soma dos expoentes de todas as variáveis (letras) que formam a parte literal do monômio. Exemplo:

O monômio $9x^3y$ tem grau 4. Pois o expoente do x é 3 e do y é 1. $(3 + 1) = 4$.

Grau de um polinômio

Grau de um polinômio é o grau do termo algébrico de maior grau do polinômio.

Exemplo:

O polinômio $2x^2 + 5x - 4x^3$ tem grau 3, pois o termo algébrico de maior expoente é $4x^3$, e seu expoente é 3.

Monômios semelhantes são aqueles que apresentam partes literais iguais.

Iremos mostrar alguns exemplos em *slides* e pediremos aos alunos que respondam em voz alta com a turma a fim de reforçar o conhecimento transmitido.

1) Classifique as expressões algébricas em monômio, binômio ou trinômio.

$$x + y$$

$$ab$$

$$m + x + 4$$

$$a + b$$

$$x + 3$$

$$x^2 + 10x - 6$$

2) Qual é o grau dos monômios ou polinômios?

$$3a^2b^5$$

$$3xyz$$

$$5x^2 - 3y$$

$$7a^3 + 2a$$

$$6xy^3 + 5x^2b - 5a^3$$

A fim de despertar a curiosidade dos alunos e apresentar onde podemos encontrar exemplos do conteúdo trabalhado vamos amostrar uma curiosidade matemática envolvendo expressões algébricas e a numeração de calçados, proposto por Dante (2008):

Curiosidade matemática

Que número você calça?

Os calçados surgiram como proteção para os pés e foram sofrendo mudanças de acordo com a necessidade de quem os calçava.

A numeração de sapatos foi criada em 1324, na Inglaterra, no reinado de Eduardo II, tendo como unidade de medida um grão de cevada, que correspondia a $\frac{1}{3}$ de polegada. Hoje, os métodos dos sistemas de numeração de calçados baseiam-se em outras unidades de medida, mas não há uma uniformidade de padrões em termos internacionais.

No Brasil, o número do sapato está relacionado com o tamanho do pé, em centímetros, pela fórmula matemática:

$$S = \frac{5p + 28}{4}$$

S = número do sapato

p = comprimento do pé em centímetros

Por exemplo, se o pé medir 24 cm, o número do seu sapato deve ser 37, pois:

$$S = \frac{5 \cdot 24 + 28}{4} = \frac{148}{4} = 37$$

Com estas condições, calcule:

- o número do sapato de uma pessoa cujo pé tem 28 cm;
- quantos centímetros tem o pé de uma pessoa que calça 32.

Apresentaremos também sobre truques numéricos que podem ser resolvidos com expressões algébricas:

Truques numéricos e as expressões algébricas

Pensei em um número de três algarismos distintos. Inverti a ordem dos algarismos obtendo um novo número. Somei esses dois números. Dividi essa soma por quatro e obtive 111. Em que número de três algarismos pensei?

Muitos truques numéricos como esse são solucionados utilizando expressões algébricas. Projetaremos uma tabela e pediremos para que eles completem conosco:

Tabela 8: Passo a passo do truque com exemplos.

Instruções	Exemplos			Expressão algébrica
Pense em um número.	5	8	10	x
Some 2 a esse número.	7			$x + 2$
Dobre o resultado.		20		$2(x + 2)$ ou $2x + 4$
Subtraia 4.	10			$2x$
Que resultado final você encontrou?	10	16	20	$2x$

Dividindo esse resultado por 2, você chega ao número pensado.	5			x
---	---	--	--	-----

Vamos fazer as seguintes perguntas para eles:

- Que número se obtém na penúltima linha?
- Compare o número da primeira linha da tabela com o da última. Como eles são?
- Que tal você usar esse truque com um colega? Ele diz o resultado final a que chegou, você divide-o por 2 e descobre o número em que ele pensou.

Daremos alguns minutos para os estudantes desenvolverem a dinâmica com os colegas.

A seguir apresentaremos alguns exercícios para os estudantes resolverem, sendo os seguintes:

01. Use uma expressão algébrica para indicar o número de anos de cada item.

- x décadas mais 5 anos; $10x + 5$
- x séculos; $100x$
- y décadas menos 3 anos; $10y - 3$
- z milênios mais s décadas. $1000z + 10s$

02. Escreve as expressões algébricas:

- A soma do cubo do número x com o quadrado do número y . $x^3 + y^2$
- O dobro do número m aumentado do cubo do número n . $m^2 + n^3$
- A terça parte de um número a menos o triplo de um número b . $\frac{a}{3} - 3b$
- A raiz quadrada de um número positivo x mais o quadrado do inverso de x . $\sqrt{x} + (-x)^2$

Avaliação:

Observação da participação ativa e cooperação nos grupos, a clareza nas justificativas e argumentações matemáticas e a capacidade de representar expressões de forma geométrica e simbólica.

Lista de Exercícios:

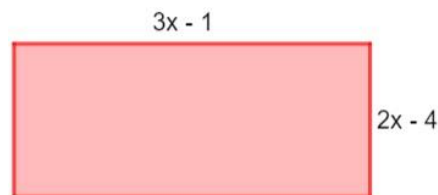
01. Se Pedro tem x anos, qual expressão determina o triplo da sua idade daqui a 6 anos?

- a) $3x + 6$
- b) $3(x + 6)$
- c) $3x + 6x$
- d) $3x \cdot 6$

02. (CEFET MG 2017) Ao entrar na sala de aula, um aluno perguntou ao seu professor de Matemática que horas eram. O professor então respondeu: desde que começou este dia, as horas que já se passaram excedem as que faltam transcorrer em 3 horas e 16 minutos. Assim, a hora em que o aluno fez a pergunta ao professor é:

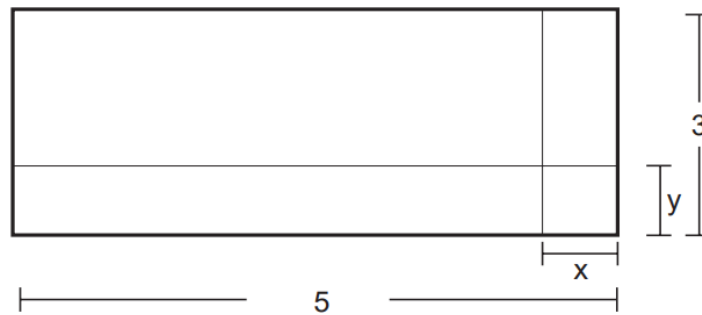
- a) 12h 36 min.
- b) 13h 38 min.
- c) 14h 38 min.
- d) 15h 16 min.

03. A expressão algébrica que representa o perímetro do retângulo a seguir é:



- a) $5x - 5$
- b) $10x - 10$
- c) $5x + 5$
- d) $8x - 6$
- e) $3x - 2$

04. (Enem 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

- a) $2xy$
- b) $15 - 3x$
- c) $15 - 5y$
- d) $-5y - 3x$
- e) $5y + 3x - xy$

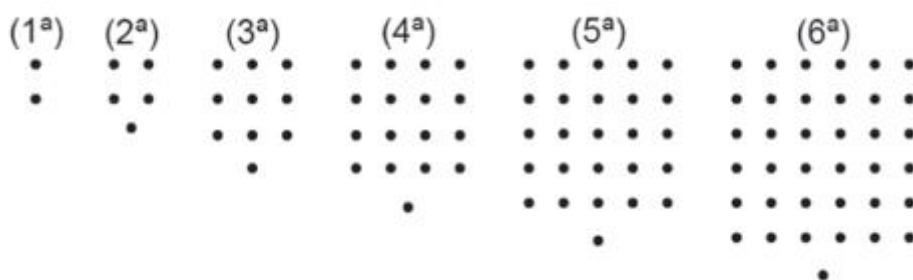
05. (UFRR) O valor da expressão $(a + b)^2 - (a - b)^2$ para $a = 25$ e $b = b_0$ é 1000. Podemos afirmar que o valor de b_0 é:

- a) 12
- b) 0
- c) 5
- d) 40
- e) 10

Resolução: Basta substituir na equação.

$$\begin{aligned} (25 + b)^2 - (25 - b)^2 &= 1000 \\ (625 + 50b + b^2) - (625 - 50b + b^2) &= 1000 \\ 625 + 50b + b^2 - 625 + 50b - b^2 &= 1000 \\ 100b &= 1000 \\ b &= \frac{1000}{100} \\ b &= 10 \end{aligned}$$

06. (Banco de Questões da Prova Brasil) As figuras mostradas abaixo estão organizadas dentro de um padrão que se repete. Mantendo essa disposição, a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura de ordem n ($n = 1, 2, \dots$) é



- a) $n + 1$
- b) $n^2 - 1$
- c) $2n + 1$
- d) $n^2 + 1$

Relatório da aula ministrada – 21/06/2025

No dia 21 de junho de 2025, começamos a aula às 8h05min com 17 alunos presentes. Inicialmente, corrigimos dois exercícios das listas anteriores e tiramos dúvidas relacionadas as listas.

As 08:30h começamos o conteúdo do encontro entregando o material manipulável. Entregamos o Algeplan e esperamos que despertassem alguma curiosidade. Os alunos demoraram engajar, mas logo fomos perguntando quais relações poderiam ser estabelecidas, e mencionamos área. Um aluno tentou relacionar o tamanho dos retângulos com o quadrado, mas ao manipularmos, informamos que essa relação não era válida. Ao decorrer da manipulação, fizemos inicialmente com as medidas dos lados que foram extraídas pelos alunos usando régua, em seguida, substituímos as medidas por incógnitas. Ao desenvolver com incógnitas, puderam relacionar a fórmula da quadrática de polinômios onde $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, um deles é encontrado pela soma dos quadrados, e retângulos, e o outro pelo lado do quadrado formado.

Questionamos os alunos sobre termos negativos, por exemplo $-x^2$, e pedimos sugestões de como poderíamos representá-lo usando o material. As sugestões foram para usar o lado do material com adesivo. Com polinômios expressados algebricamente, eles fizeram a representação usando material e vice-versa.

Após o intervalo, fizemos uma operação com polinômios e eles verificaram que na hora de representar com o Algeplan, não conseguiam montar um retângulo. Retomamos expressões numéricas usando um exercício expositivo em que muitos tiveram dificuldade de encontrar o resultado. Começamos as definições de

expressões algébricas, monômios e polinômios, muitos dos alunos apresentaram facilidade em interpretar os nomes. A professora regente auxiliou durante a explicação, inserindo as definições sobre parte numérica e literal, isso ajudou nas explicações posteriores, pois pedia para identificar as partes literais. Posteriormente, apresentamos alguns monômios e polinômios e pedimos aos alunos para identificá-los, por tipo e seu grau respectivamente.

Pedimos aos alunos quais os números que calçam, para adentrar sobre a história por trás da invenção da numeração dos calçados, com isso, apresentamos a fórmula usada no Brasil para a numeração e evidenciamos que isso é uma representação algébrica. Pedimos que encontrassem a medida do seu pé pela numeração do calçado ou inverso. Concluimos com uma última atividade na qual explorávamos o pensamento lógico, este exercício pedia para pensar em um número e depois de algumas operações, o resultado era o dobro do número pensado. Os alunos copiaram uma tabela com alguns exemplos não completos e depois fizeram esta experiência com os colegas.

Encerramos o encontro como programado e nos despedindo, pudemos perceber que os alunos começaram a desenvolver melhor as atividades de investigação conforme os encontros, isto é dado pelo fato da quebra do paradigma de toda aula ser expositiva e exercícios.

Nos avaliamos positivamente quanto à organização dos materiais e a condução das atividades. Em relação aos objetivos planejados, foram alcançados parcialmente, pois conseguimos introduzir conceitos algébricos com o Algeplan, definir monômios e polinômios e exemplificar a álgebra com o contexto diário dos estudantes, por exemplo, com a atividade da numeração dos calçados. No entanto, os alunos não conseguiram abstrair completamente a relação do material manipulável com a representação simbólica. O exercício de expressão numérica que foi realizado após o intervalo também não foi desenvolvido completamente.

Percebemos que o tempo da atividade inicial até a organização dos alunos, não foi o que esperávamos, e comprometeu o restante do planejamento. Nossa mediação podia ser mais explorada com a manipulação do material, antes de apresentar as definições formais. Porém, consideramos o uso do Algeplan foi essencial para o aprendizado dos alunos, pois a visualização concreta dos conceitos.

Para melhorar o planejamento usaríamos momentos de socialização das descobertas ao longo da atividade, o que facilitaria o andamento conjunto de todos os

colegas e evitar confusões quanto ao desenvolvimento e garantir a participação de todos os estudantes.

AULA 08 (28/06/2025) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Equações - 28/06/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Identificar e compreender uma equação de 1º e 2º grau e a noção de solução de uma equação.

Objetivos específicos:

- Identificar em que nível de conhecimento os alunos se encontram a respeito do conteúdo equação do 1º grau;
- Reconhecer e explorar as linguagens algébricas para resolver problemas envolvendo equações de 1º grau;
- Identificar e compreender equações quadráticas e discutir o significado das raízes em confronto com a situação-problema;
- Relacionar a fatoração com a resolução de equações quadráticas;
- Resolver equações quadráticas completando quadrados;
- Conhecer e compreender a fórmula resolutive da equação quadrática.

Conteúdo: Equações de 1º e 2º grau.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula dando as boas-vindas aos resilientes alunos do Promat e questionaremos se tiveram alguma dificuldade na resolução da lista de exercícios, caso surja uma dúvida, iremos resolver um exercício da lista anterior no quadro.

(10 Minutos)

Pediremos que formem trios e aplicaremos o Jogo “O teu e o meu”, auxiliaremos para que os alunos desenvolvam os conceitos algébricos, além de desenvolver a “capacidade de pensar, refletir, analisar, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las” (Araújo, 2004, p.8)

Segue a descrição do jogo “O TEU E O MEU”

Material: Tabuleiro numerado de 1 a 49; Dois dados numerados de 1 a 6; 10 fichas, de cores distintas, para cada jogador; 20 cartas com enunciados verbais

Regra do Jogo: Jogo para três ou quatro jogadores.

- **Joga primeiro** aquele que obtiver o menor número no dado.
- O **primeiro jogador** retira uma das 18 cartas que devem estar em um monte, viradas sobre a mesa.
- O **jogador seguinte** atira os dados e a soma obtida será a quantidade “dele”.
- O **jogador anterior** deve ler alto o enunciado da carta retirada e tentar dar a resposta ao problema, “quanto eu tenho?”. Isto é, deve encontrar o número que corresponde à “minha quantidade” tendo por base a do outro, que tem a soma obtida nos dados.
- Colocar esse resultado no tabuleiro e devolver a carta ao monte, passando a jogada para o próximo jogador, que retirará uma outra carta do monte, enquanto o jogador seguinte jogará os dados.
- Se o número obtido não está no tabuleiro ou se a casa já estiver ocupada, o jogador perde sua vez.
- Se um outro jogador perceber que o resultado é incorreto, o jogador anula o ponto marcado e passa para o próximo fazer a sua jogada.
- Ganha quem colocar todas as fichas primeiro.

Tabuleiro:

Figura 56: Tabuleiro

☆ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	○ 11	12	○ 13	14
15	16	17	□ 18	19	20	21
22	○ 23	24	25	26	27	28
29	□ 30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
○ 43	44	○ 45	46	47	48	49

Se marcar a ☆ você pode remover uma peça de cada oponente.

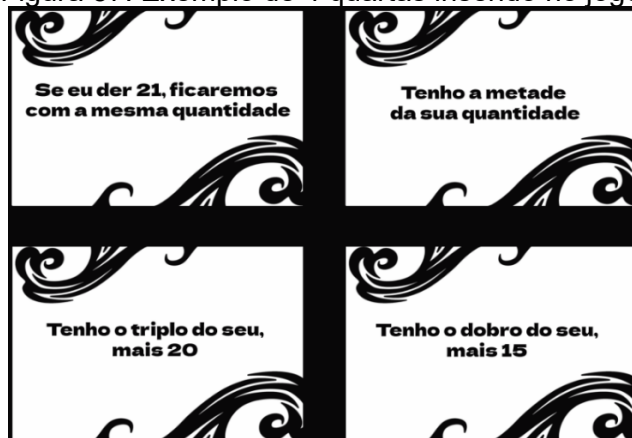
Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.

Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

Fonte: Acervo dos autores, 2025.

Conteúdo das cartas:

Figura 57: Exemplo de 4 quartas inserido no jogo.



Fonte: Acervo dos autores, 2025.

(50 minutos)

Iremos orientar individualmente que os alunos leiam a atividade e a realizem, utilizando a estratégia que julgarem adequada. Em seguida, deixe que discutam com os colegas do trio suas soluções e modos de representar a atividade. Deixaremos alguns minutos para um debate coletivo para que os trios compartilhem o que discutiram. O propósito desta atividade é fazer os alunos explorarem as linguagens algébricas para reconhecer situações que envolvam equações de 1º grau.

Atividade: Represente cada situação a seguir com uma sentença matemática:

Um número somado a três unidades é igual a vinte e seis. $x + 3 = 26$, Equação
Somei um número a quinze unidades. $x + 15$, Expressão algébrica
O triplo de um número menos dezessete unidades é igual a treze. $3 \cdot x - 17$, Equação
A soma de sete unidades a metade de um número é igual a trinta e cinco. $7 + \frac{x}{2} = 35$, Equação
Multipliquei um número por 4 unidades. $4 \cdot x$, Expressão algébrica

Observando as sentenças matemáticas que você elaborou, classifique-as em:

- Expressão algébrica: envolve coeficiente numérico, parte literal e operações
- Equação: toda sentença matemática expressa por uma igualdade, em que exista uma ou mais incógnitas

Após identificar as equações. Você seria capaz de determinar o valor das incógnitas? Registre seus cálculos.

Um número somado a três unidades é igual a vinte e seis.

$$x + 3 = 26; x + 3 - 3 = 26 - 3; x = 23.$$

O triplo de um número menos dezessete unidades são iguais a treze.

$$3 \cdot x - 17 = 13; 3 \cdot x - 17 + 17 = 13 + 17; 3x: 3 = 30: 3; x = 10.$$

A soma de sete unidades a metade de um número é igual a trinta e cinco.

$$7 + \frac{x}{2} = 35; 7 - 7 + \frac{x}{2} = 35 - 7; \frac{x}{2} \cdot 2 = 28 \cdot 2; x = 56.$$

Durante a atividade iremos questionar os alunos perguntas como “Qual a função de utilizarmos incógnitas na expressão?”, “Como podemos elaborar uma expressão algébrica?” e “Como podemos criar uma igualdade de expressões algébricas?”.

Após a atividade, iremos apresentar as resoluções refletidas sobre o problema, sempre ressaltando a importância da utilização das linguagens algébricas para reconhecer situações que envolvem equações de 1º grau.

(30 minutos)

Desta forma, ordenaremos os conceitos.

Equação: Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, em que exista uma ou mais incógnitas

Usando um exemplo da atividade temos:

Língua natural: Um número somado a três unidades é igual a vinte e seis.

Linguagem matemática: $x + 3 = 26$.

$x + 3 = 26$ é uma equação enquanto $x + 3$ e 26 são expressões algébricas.

(10 minutos)

INTERVALO

Pediremos aos alunos que leiam a segunda atividade proposta e busquem mentalmente a solução do problema. Em seguida, deixaremos que discutam com os colegas como pensaram e posteriormente um debate coletivo. Esta atividade tem como propósito fazer os alunos refletirem sobre a solução da charada matemática.

1) A professora da turma do 9º Ano A do Colégio Trapézio pediu que os alunos se sentassem em duplas e propôs um desafio para eles. Os alunos deveriam adivinhar o mês de aniversário do colega através de uma charada matemática.

Considere o diálogo entre Amanda e Mateus:

Amanda: - O número que representa o meu mês de aniversário quando elevado a segunda potência e subtraído dele mesmo resulta em vinte.

Mateus: - O mês de meu aniversário ao quadrado subtraído do seu triplo é zero.

Qual será o mês de aniversário de Amanda e Mateus?

2) Leia o que Amanda e Mateus responderam um ao outro:

Mateus: - Já sei! Você nasceu no mês 5, ou seja, em maio.

Amanda: - Sua charada não faz sentido, Mateus. Não tem como você nascer no mês 0, se estamos considerando os meses de 1 a 12.

Analisando as respostas de Mateus e Amanda, responda as questões a seguir:

Você concorda com a resposta de Mateus?

Amanda considerou a charada de Mateus sem sentido. O que a fez pensar assim? Justifique.

O que Mateus poderia dizer para que Amanda refletisse um pouco mais sobre sua resposta?

Iremos indagar os alunos com perguntas como “Chegamos a mesma resposta de Mateus? Se não, por quê?”; “Qual outra resposta é possível para a charada de Mateus?”; “O que devemos considerar para encontrar as soluções ou solução correta de um problema?”; etc.

Após essa atividade, iremos discutir as soluções com uma série de lâminas. Nestes poderá ser visto diferentes possibilidades de se chegar à solução do problema.

Resposta: Amanda nasceu no mês de maio (mês 5) e Mateus nasceu no mês de março (mês 3).

Resoluções possíveis: Por tentativas, podem ser aplicados os números referentes aos meses até que $5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$, e $3^2 - 3 \cdot 3 = 9 - 9 = 0$. Ou podem montar uma expressão algébrica do tipo $M^2 - M = 20$ e $M^2 - 3M = 0$, onde verificam-se duas raízes, -4 e 5 para primeira e 0 e 3 para a segunda, onde somente uma delas é solução do problema.

(15 minutos)

Neste momento iremos apresentar os conceitos sobre equações quadráticas e suas nomenclaturas.

Nas situações problemas discutidos, você se deparou com **equações quadráticas** (equações do 2º grau):

$$M^2 - M = 20 \text{ e } M^2 - 3M = 0$$

Este tipo de equação pode assumir duas raízes como resposta.

Toda equação quadrática pode ser reduzida à seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(com $a \neq 0$), sendo:

- a o coeficiente do quadrado da incógnita x .
- b o coeficiente da incógnita x .
- c o termo independente da incógnita.

(5 minutos)

Pediremos aos alunos que leiam a terceira atividade proposta e escrevam suas anotações no caderno. Em seguida, deixaremos que discutam com os colegas como pensaram e posteriormente um debate coletivo. A compreensão do processo de fatoração como uma alternativa na resolução de equações quadráticas é o objetivo desta atividade.

1) Rodrigo ao resolver uma atividade na aula de Matemática se deparou com a seguinte equação quadrática:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

O que Rodrigo pode considerar para resolver essa equação? Faça as anotações que achar relevante em seu caderno.

2) Analise as anotações que Rodrigo fez, em uma folha, para resolver a equação quadrática e responda as questões a seguir:

Figura 58: Anotações de Rodrigo.

$x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x + a).(x + b) = 0$
 $a + b = -5$ e $ab = 6$
 $(x - 2).(x - 3) = 0$

Encontrei as raízes da equação!

Fonte: MELO, Nova Escola, 2018.

- O que Rodrigo estava planejando ao escrever na segunda linha $(x + a)(x + b) = 0$?

Rodrigo estava planejando escrever o trinômio da equação como um produto de dois binômios, ou seja, realizar a fatoração

- Explique a relação entre as duas primeiras linhas com a terceira.

Como é planejado fatorar a equação $x^2 - 5x + 6$ para que ela fique representada como produto de dois fatores do tipo $(x + a)(x + b)$, é preciso compreender o que este produto representa. Logo, ao realizar a propriedade distributiva no produto $(x + a)(x + b)$ encontra-se a expressão $x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$. Portanto, ao comparar essa expressão com o trinômio inicial é necessário que $a + b$ seja igual a -5 e ab seja igual a 6 .

- De onde surgiram os números -2 e -3 escritos na última linha?

Os números -2 e -3 ocupam o lugar das letras a e b no produto $(x + a)(x + b)$. Assim seus valores vieram da soma e do produto da linha anterior, onde foi preciso determinar um produto que resultasse em 6 . É natural pensar na multiplicação de 2 por 3 , porém a soma desses dois números é 5 e deve-se encontrar uma soma igual a -5 . Basta então considerar seus opostos, os números -2 e -3 , que quando multiplicados resultam em 6 e somados resultam em -5 .

- Por que Rodrigo escreveu que encontrou as raízes da equação? E quais foram as raízes encontradas por ele?

Rodrigo verificou que o produto dos dois binômios na equação é igual a 0 , dessa forma concluiu que só é possível que isso aconteça se um dos fatores for zero. Por consequência, o número que anula o binômio $(x - 2)$ é o 2 e o binômio $(x - 3)$ é o 3 . Assim, Rodrigo determinou através da fatoração que as raízes da equação são os números 2 e 3 .

Iremos questionar os alunos durante o desenvolvimento com perguntas como “O que vocês observam na equação?”; “Alguém conseguiu encontrar as raízes da equação? Como?”; “A equação apresenta um trinômio?”, etc.

Depois que os estudantes compartilharem seus pensamentos e anotações, passaremos uma série de lâminas com algumas considerações sobre a equação e a análise feita em cima da resolução de Rodrigo e relembremos sobre fatoração de trinômios. Caso algum aluno ainda tenha tido formas diferentes de resolver, deixaremos que ele a apresente.

(25 minutos)

Definiremos os conceitos por volta de equações quadráticas por fatoração de trinômios.

As equações quadráticas podem apresentar trinômios em um de seus membros.

$$ax^2 + bx + c = d$$

Estes trinômios podem ser quadrados perfeitos ou não:

Nas equações com **trinômios do quadrado perfeito** temos:

$x^2 + 2ax + a^2 = d$ $(x + a)^2 = d$ $(x + a) = \pm\sqrt{d}$	$x^2 - 2ax + a^2 = d$ $(x - a)^2 = d$ $(x - a) = \pm\sqrt{d}$
---	---

Sendo assim as raízes da equação ficam determinadas pelas equações do 1º grau acima.

Nas equações com **trinômios que não são quadrados perfeitos** temos:

Equações quadráticas do tipo $x^2 + Sx + P = 0$, com coeficiente de x^2 igual a 1, podem ser fatoradas como produto de dois binômios $(x + a)(x + b) = 0$.

Para descobrir os valores de a e b relacionamos os coeficientes S e P da equação quadrática com a soma e produto de a com b .

$$S = a + b$$

$$P = ab$$

Determinado os valores de a e b , aplicamos a propriedade do produto nulo para obter as raízes da equação

$$x^2 + Sx + P = (x + a)(x + b) = 0$$

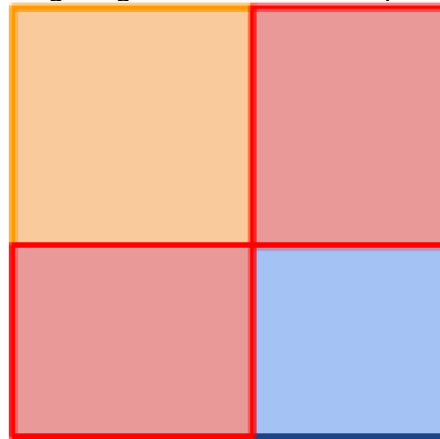
Sendo assim, encontra-se o valor de x anulando o binômio $(x + a)$ e o binômio $(x + b)$. Portanto, $x = -a$ e $x = -b$.

(5 minutos)

Pediremos aos alunos que leiam a quarta atividade proposta e busquem responder as questões. Em seguida, deixaremos que discutam com os colegas como pensaram e posteriormente um debate coletivo. Esta por vez tem o propósito de discutir soluções e apresentar o método de completar quadrados como uma alternativa para resolução.

1) Na figura ao lado o quadrado azul tem área x^2 e a soma das áreas dos retângulos vermelhos é $10x^2$. Analise as informações dadas e responda as questões a seguir:

Figura 59: Figura geométrica formado por retângulos.



Fonte: MELO, Nova Escola, 2018.

(A) Encontre a área do quadrado laranja e registre a forma como você pensou.

Como a área do quadrado azul é x^2 os seus lados possuem medidas iguais a x . Analisando os dois retângulos vermelhos de área $5x$ cada, pois $5x + 5x = 10x$, sabemos que dois de seus lados tem medida x então os outros dois lados possuem medidas iguais a 5. Sendo assim, como o quadrado laranja possui lado comum com o retângulo, sua área é $5 \cdot 5 = 25$ unidades quadradas.

(B) Escreva a expressão algébrica que representa a área total da figura.

$x^2 + 10x + 25$, $x^2 + 5x + 5x + 25$ ou $(x + 5)^2$.

(C) Se a área total da figura é de 81 unidades quadradas, qual(is) estratégia(s) você pode utilizar para determinar o valor numérico de x ?

$$x^2 + 10x + 25 = 81$$

$$(x + 5)^2 = 81$$

$$x + 5 = 9$$

$$x = 4$$

$$x + 5 = -9$$

$$x = -14$$

Portanto o valor a ser considerado para x é o número natural 4.

2) Quais são as soluções da equação $x^2 + 10x - 56 = 0$? Busque relacionar as respostas anteriores para desenvolver.

O trinômio $x^2 + 10x - 56$ não é um trinômio do quadrado perfeito, mas dois de seus termos são iguais ao trinômio $x^2 + 10x + 25$ da equação anterior. Para que eles fiquem iguais e seja possível resolver a equação da mesma forma é necessário adicionar 81 unidades ao trinômio:

$$(+81) x^2 + 10x - 56 = 0 (+81)$$

$$x^2 + 10x + 25 = 81$$

Percebe-se que ao adicionar o número 81 nos deparamos com a mesma equação e podemos resolver exatamente do mesmo jeito:

$$x^2 + 10x + 25 = 81$$

$$(x + 5)^2 = 81$$

$$(-5)x + 5 = 9(-5)$$

$$x = 4$$

$$(-5)x + 5 = -9(-5)$$

$$x = -14$$

Apresentaremos uma série de lâminas com uma das possíveis resoluções e deixaremos os alunos discutirem através da visualização das figuras, trazendo observações e associações com as imagens.

(20 minutos)

Iremos apresentar a equação quadrática reduzida e questionaremos os alunos sobre quais outros métodos podem ser resolvidos além do processo da fatoração, questionaremos também “De que maneira podemos generalizar esse processo de resolução, a fim de obter uma fórmula para encontrar o valor desconhecido da equação quadrática?”. Com isso, apresentaremos um diálogo entre dois alunos fictícios que desenvolveram estratégias diferentes para resolver estas questões.

Toda equação quadrática pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ sendo } a, b \text{ e } c \text{ coeficientes reais e } a \neq 0.$$

Você já resolveu equações quadráticas pelo processo de fatoração. De que maneira podemos generalizar esse processo de resolução, a fim de obter uma fórmula para encontrar o valor desconhecido da equação quadrática?

Figura 60: Diálogo entre Gabriel e Marcos

Pretendo fatorar a equação, mas eu não sei o valor do coeficiente **c**, então vou adicionar **-c** aos dois membros para obter $ax^2+bx=-c$. Em seguida, vou multiplicar a equação por **4a** para ter um quadrado perfeito no primeiro membro:


$$(.4a) ax^2+bx=-c (.4a)$$

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$


Bom, eu também vou adicionar **-c** aos dois membros da equação. Porém, para ter certeza que tenho um quadrado perfeito vou dividir a equação por **a**.

$$(\div a) ax^2 + bx = -c (\div a)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$



Gabriel



Marcos

Fonte: MELO, Nova Escola, 2018.

1) *Dedução de acordo com os pensamentos de Gabriel:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx &= -c \\
 4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \\
 (2ax)^2 + 2b \cdot (2ax) + b^2 &= -4ac + b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

2) *Dedução de acordo com os pensamentos de Marcos:*

$$\begin{aligned}
 ax^2 + b + c &= 0 \\
 ax^2 + bx &= -c \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\
 x^2 + 2x \frac{b}{2a} &= -\frac{c}{a} \\
 x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{-4ac + b^2}{4a^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} \\
 x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

3) *Terceira possibilidade de dedução:*

$$\begin{aligned}
 ax^2 + b + c &= 0 \\
 ax^2 + bx &= -c \\
 a^2x^2 + axb &= -ca \\
 (ax)^2 + 2 \cdot (ax) \cdot \frac{b}{2} &= -ca \\
 (ax)^2 + 2 \cdot (ax) \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} &= \frac{-4ac + b^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4} \\
 ax + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4}} \\
 ax &= \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

Analise a forma como dois alunos pensaram para iniciar o desenvolvimento da fórmula e compare com o que você já realizou. Essas duas estratégias chegarão na mesma fórmula? Justifique.

Para ter de onde os caminhos iniciados por Gabriel e Marcos chegará, o aluno precisa dar continuidade aos dois processos (conforme descritos acima) ou ainda verificar que esses desenvolvimentos são iguais ou semelhantes com o que já tinha sido feito por ele mesmo anteriormente. Espera-se que os alunos percebam que nos dois processos iniciados por Gabriel e Marcos, existe a busca para obter um trinômio do quadrado perfeito e então, pode fatorar a equação.

Apresentaremos todos os métodos resolutivos e engajaremos os alunos em perguntar como fizeram para resolver as questões. Reforçaremos aos alunos que a fórmula é um meio que pode facilitar, mas não o único caminho a ser considerado.

(25 minutos)

Com isso concluído iremos formalizar os conceitos sobre a fórmula resolutive da equação de segundo grau.

A fórmula que encontramos, chamada de **fórmula resolutive da equação quadrática**, permite encontrar as raízes da equação através dos coeficientes a , b e c .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(5 minutos)

Com isso encerraremos a aula entregando a lista de exercícios para casa.

Avaliação:

Os alunos serão frequentemente orientados a participar das atividades e a desenvolver os resultados, porém não será realizada nenhuma avaliação formal de aprendizado.

Lista de exercícios:

01. (ENEM PPL 2022) Admita que um grupo musical deseja produzir seu próprio CD. Para tanto, adquire um pequeno equipamento para gravar CDs ao valor de R\$ 252,00, e vários CDs novos, sendo esses os únicos gastos realizados na produção dos CDs. Sabe-se que o custo total na compra do equipamento e dos CDs totalizou o valor de R\$ 1 008,00, e que o custo unitário de cada CD novo, em real, varia de acordo com o número n de CDs adquiridos, segundo o quadro.

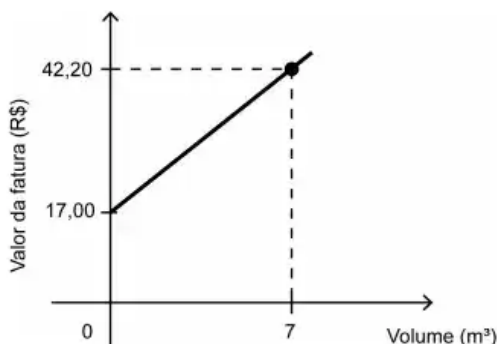
Número n de CDs adquiridos	Custo unitário de cada CD novo (em real)
$n < 1\ 000$	0,45
$1\ 000 \leq n < 2\ 500$	0,40
$2\ 500 \leq n$	0,35

Nessas condições, o número de CDs adquiridos pelo grupo musical é igual a

- a) 1680 b) 1890 c) 2160 d) 2520 e) 2880

02. (Enem Digital 2020) Uma fatura mensal de água é composta por uma taxa fixa, independentemente do gasto, mais uma parte relativa ao consumo de água, em metro

cúbico. O gráfico relaciona o valor da fatura com o volume de água gasto em uma residência no mês de novembro, representando uma semirreta.



Observa-se que, nesse mês, houve um consumo de 7 m³ de água. Sabe-se que, em dezembro, o consumo de água nessa residência, em metro cúbico, dobrou em relação ao mês anterior.

O valor da fatura referente ao consumo no mês de dezembro nessa residência foi

- a) superior a R\$ 65,00 e inferior a R\$ 70,00.
- b) superior a R\$ 80,00 e inferior a R\$ 85,00.
- c) superior a R\$ 90,00 e inferior a R\$ 95,00.
- d) superior a R\$ 95,00.
- e) inferior a R\$ 55,00.

03. (Enem Digital 2020) Segundo indicação de um veterinário, um cão de pequeno porte, nos dois primeiros meses de vida, deverá ser alimentado diariamente com 50 g de suplemento e tomar banho quatro vezes por mês. O dono de um cão de pequeno porte, seguindo orientações desse veterinário, utilizou no primeiro mês os produtos/serviços de um determinado pet shop, em que os preços estão apresentados no quadro.

Produtos/Serviços	Valor
Suplemento	R\$ 8,00 (pacote de 500 g)
Banho	R\$ 30,00 (preço unitário)

No mês subsequente, o fabricante reajustou o preço do suplemento, que, nesse pet shop, passou a custar R\$ 9,00 cada pacote de 500 g. Visando manter o mesmo gasto mensal para o dono do cão, o gerente do pet shop decidiu reduzir o preço unitário do banho. Para efeito de cálculos, considere o mês comercial de 30 dias.

Nessas condições, o valor unitário do banho, em real, passou a ser

- a) 27,00
- b) 29,00
- c) 29,25
- d) 29,50
- e) 29,75

04. Um fazendeiro pretende construir um galinheiro ocupando uma região plana de formato retangular, com lados de comprimentos L metro e C metro. Os lados serão cercados por telas de tipos diferentes. Nos lados de comprimento L metro, será

utilizada uma tela cujo metro linear custa R\$ 20,00, enquanto, nos outros dois lados, uma que custa R\$ 15,00. O fazendeiro quer gastar, no máximo, R\$ 6000,00 na compra de toda a tela necessária para o galinheiro, e deseja que o galinheiro tenha a maior área possível.

Qual será a medida, em metro, do maior lado do galinheiro?

- a) 85 b) 100 c) 175 d) 200 e) 350

05. Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e retorno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas.

A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação:

- a) $x = 380 - x^2$ b) $x^2 + x = 380$ c) $x^2 = 380$ d) $2x + x = 380$ e) $2x = 380$

Apêndice A – Material do Jogo

Se eu der 21, ficaremos com a mesma quantidade

Tenho a metade da sua quantidade

Se acrescentar 4 ao teu, eu ficarei com o dobro da sua metade

Tenho o triplo do seu, mais 20

Tenho o dobro do seu, mais 15

A diferença entre as nossas quantidades é 45, porém eu tenho a maior

Vá! A sua é só a quarta parte da minha

Não compare! 3 vezes a sua quantidade só chega na metade da minha

Se me tirar 8 eu ficarei com um a mais que você

Tenho a mesma quantidade que você

A minha quantidade é o dobro da sua

A minha quantidade é o triplo da sua

A diferença entre as nossas quantidades é 23, porém eu tenho o maior

Tenho 2 a menos que 4 vezes a sua quantidade

A soma das nossas quantidades é 47

Você tem 4 vezes menos que eu

Se eu lhe der 15, ficaremos com a mesma quantidade

Se acrescentar 6 à sua quantidade, você terá o dobro da minha

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

**Teu
Meu**

★ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se marcar a ★ você pode remover uma peça de cada oponente.
 Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.
 Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

★ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se marcar a ★ você pode remover uma peça de cada oponente.
 Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.
 Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

★ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se marcar a ★ você pode remover uma peça de cada oponente.
 Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.
 Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

★ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se marcar a ★ você pode remover uma peça de cada oponente.
 Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.
 Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

★ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se marcar a ★ você pode remover uma peça de cada oponente.
 Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.
 Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

★ 1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se marcar a ★ você pode remover uma peça de cada oponente.
 Se marcar um ○ você pode colocar uma peça extra em qualquer casa vazia.
 Se marcar um □ você deve remover uma outra peça sua do tabuleiro.

Teu
Meu

Teu
Meu

Teu
Meu

Teu
Meu

Teu
Meu

Teu
Meu

Relatório da aula ministrada – 28/06/2025

No dia 28 de junho de 2025, iniciamos a aula às 8h05min, contando com a presença de 15 alunos. Inicialmente, corrigimos dois exercícios das listas anteriores e esclarecemos dúvidas relacionadas a esse conteúdo. Às 8h16min, demos início ao conteúdo programado, entregando aos alunos o material do jogo “Teu e o Meu”, juntamente com uma folha contendo as regras. Explicamos brevemente como funcionava a dinâmica e pedimos para que iniciassem a atividade. Durante o desenvolvimento do jogo, mencionamos outras regras complementares e acompanhamos os grupos em sua execução.

Essa atividade tinha como objetivo transformar equações escritas em linguagem natural para a linguagem algébrica. Alguns alunos demonstraram dificuldade no início, mas apresentaram bom desenvolvimento ao longo do jogo. Um dos grupos concluiu a atividade rapidamente, conseguindo finalizar o jogo duas vezes. De modo geral, o objetivo foi alcançado, pois os alunos participaram com engajamento.

Em seguida, entregamos a atividade sobre expressões algébricas e equações. Após realizarem a transformação de linguagem natural para algébrica, conceituamos equação e resolvemos detalhadamente a tabela no quadro. Houve grande participação, incluindo dois alunos que foram ao quadro para resolver exercícios junto à turma. O objetivo desta atividade foi atendido.

Após o intervalo, abordamos o conteúdo de equação quadrática, introduzindo-o com um diálogo entre dois personagens. Os alunos apresentaram dificuldade em explicar o motivo pelo qual utilizaram a fórmula de Bhaskara. Tivemos dificuldades para trabalhar a resolução que havíamos preparado, pois todos resolveram diretamente com a fórmula de Bhaskara, enquanto pretendíamos apresentar outros métodos, como soma e produto, fatoração de trinômios e tentativa e erro.

Além disso, conceituamos a equação do segundo grau e seus coeficientes. Na atividade seguinte, que envolvia conceitos de geometria, os alunos deveriam calcular a área de um quadrado e identificar a expressão algébrica correspondente. O objetivo era demonstrar o método de completamento de quadrados perfeitos para trinômios, mas não foi alcançado, pois o tempo não foi suficiente e os alunos já se mostravam desinteressados devido ao cansaço.

Por fim, entregamos a lista de exercícios e apresentamos rapidamente a resolução da primeira parte da última atividade. Contudo, os alunos não tiveram o aproveitamento esperado. Encerramos o encontro repassando informações sobre a gincana do 10º encontro que irá acontecer.

Neste encontro sobre equações, fizemos certo ao dar tempo para que os alunos sanassem suas dúvidas, o que favoreceu o aprendizado de todos, pois aqueles com desenvolvimento mais rápido ajudaram os colegas. Em contrapartida, a aula teve um ritmo mais lento, resultando em um aproveitamento abaixo do planejado para todo o conteúdo. Em relação à comunicação entre professores e alunos, na maior parte do tempo conseguimos nos expressar claramente, embora em alguns momentos fosse necessário o auxílio dos colegas ou uma nova explicação, o que fez com que as falas se completassem, garantindo melhor compreensão dos estudantes. Essa união entre os professores contribuiu para o bom andamento da aula, mostrando que todos colaboraram ativamente. Essa experiência nos ensinou que, mesmo quando nem tudo sai como o planejado, ainda assim é possível atingir bons resultados e promover um envolvimento satisfatório dos alunos.

AULA 09 (05/07/2025) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Função do 1º grau - 05/07/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Compreender o conceito e as aplicações da função polinomial do 1º grau, por meio de atividades investigativas e situações-problema, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, da análise crítica e da tomada de decisões com base em dados quantitativos.

Objetivos específicos:

- Identificar as características principais de uma função do 1º grau (coeficiente angular, coeficiente linear, crescimento e decrescimento).
- Resolver equações relacionadas à função do 1º grau em diferentes contextos, inclusive do cotidiano.
- Interpretar situações reais que envolvem funções afins e representá-las por meio de expressões algébricas e gráficos cartesianos.

- Trabalhar de forma colaborativa em atividades de investigação matemática, registrando e discutindo estratégias e soluções com os colegas.
- Avaliar e refletir sobre o próprio processo de aprendizagem, por meio de jogos interativos e da construção coletiva de conhecimentos.

Conteúdo: Função do 1º grau.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Atividades impressas, lâminas, quadro e giz.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula terminando a correção da atividade da aula anterior e seguiremos com correções de pelo menos um exercício da lista de atividades da aula passada.

2) Quais são as soluções da equação $x^2 + 10x - 56 = 0$? Busque relacionar as respostas anteriores para desenvolver.

O trinômio $x^2 + 10x - 56$ não é um trinômio do quadrado perfeito, mas dois de seus termos são iguais ao trinômio $x^2 + 10x + 25$ da equação anterior. Para que eles fiquem iguais e seja possível resolver a equação da mesma forma é necessário adicionar 81 unidades ao trinômio:

$$(+81) x^2 + 10x - 56 = 0 \quad (+81)$$

$$x^2 + 10x + 25 = 81$$

Percebe-se que ao adicionar o número 81 nos deparamos com a mesma equação e podemos resolver exatamente do mesmo jeito:

$$x^2 + 10x + 25 = 81$$

$$(x + 5)^2 = 81$$

$$(-5) x + 5 = 9 \quad (-5)$$

$$x = 4$$

$$(-5) x + 5 = -9 \quad (-5)$$

$$x = -14$$

(25 minutos)

Organizaremos os alunos em duplas ou trios e distribuiremos um pequeno caderno elaborado com folhas sulfite contendo uma atividade de investigação matemática. Esta mesma (a atividade de investigação), tem enfoque em uma abordagem qualitativa, visando uma intervenção pedagógica, por apresentar maior interação social entre os alunos. O caderno será único por grupo, nele um dos alunos será responsável por anotar, de forma colaborativa, suas conjecturas, estratégias e conclusões.

Será disponível também folha milimetrada, régua, e poderá ser utilizado o celular durante esta atividade, tanto como calculadora, como também, fonte de pesquisa.

Quadro 1: Atividade investigativa

Atividade: Uma loja de pneus está oferecendo emprego nas seguintes condições:

- I) Representante Comercial:
Salário de R\$ 2000,00 + R\$ 10,00 por pneu vendido.
 - II) Vendedor direto na loja:
Salário de R\$ 1400,00 + (10% pela venda de cada pneu)
 - III) Vendedor direto pelo *site*:
Salário de R\$ 1600,00 + (8% pela venda de cada pneu)
- Nestas condições, considere que a loja efetua uma grande quantidade de vendas por mês.
- a) Qual destas propostas é a mais conveniente? Justifique sua resposta.
 - b) É possível identificar que alguma proposta é sempre mais vantajosa que as outras? Justifique sua resposta.
 - c) Em quais condições a proposta menos convincente passaria a ser a mais interessante? Justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Nascimento; Quartieri, 2020.

Esta atividade tem por intuito unir os alunos ao desenvolvimento da função afim e comparar a diferença entre os salários para o volume de pneus vendidos. “O diário de campo consiste em um instrumento de registro de observações, comentários e reflexões de atividades de pesquisas e/ou registro do processo de trabalho.” (Nascimento, Quartieri, 2020). Com isso, para registrar os acontecimentos, utilizaremos a observação participante, considerando que a presença constante junto aos alunos é essencial para a construção detalhada e contextualizada do diário de campo.

Para facilitar o desenvolvimento da atividade, forneceremos também folhas milimetradas e régua, para a possível necessidade de construção de gráficos pelos alunos.

Definição: Uma função polinomial de 1º grau tem a forma $f(x) = ax + b$ e $a \neq 0$. Conceitualmente, a função de 1º grau aparece em situações em que há uma parte fixa e uma parte que varia de maneira diretamente proporcional à outra grandeza.

O **coeficiente** da variável na função (**a**) é chamado de coeficiente angular; já o termo independente na função (**b**) é chamado de coeficiente linear.

$$f(x) = ax + b$$

a : coeficiente angular

b : coeficiente linear

Quando $b = 0$, a função é chamada de **função linear**.

É importante perceber que o valor do termo independente (**b**) da função é o ponto em que o gráfico da mesma corta o eixo y.

(130 minutos)

Assim, com todos os dados detalhados, pediremos aos alunos para compartilharem suas respostas e, como um todo, discutir sobre suas conclusões.

(15 minutos)

Finalizaremos com um *Kahoot* contendo todas as perguntas que foram usadas no jogo Show do Milhão aplicado no Encontro 1; por este pretendemos avaliar o conhecimento adquiridos pelos alunos ao longo do curso.

- 1) 4 está para 3, assim como 12 está para x, qual o valor de x:
a. 9 b. 7 c. 4 d. 3
- 2) $(2^3)^2$ é o mesmo que:
a. 51 b. 54 c. 64 d. 44
- 3) Qual dessas figuras geométricas não encontramos em nossa Bandeira Nacional?
a. Retângulo b. Círculo c. Triângulo d. Losango
- 4) Dentre os números abaixo, qual é o divisor de 99?
a. 11 b. 12 c. 13 d. 8
- 5) Dois quartos de hora correspondem a quantos minutos?
a. Trinta b. Quinze c. Quarenta d. Dez
- 6) Como se chamam duas retas que nunca se encontram?
a. Perpendiculares b. Paralelas c. Diagonais d. Oblíquas
- 7) Todos os números divisíveis por 1 e por ele mesmo são chamados de:
a. Pares b. Parentes c. Parecidos d. Primos
- 8) Quantos números divisíveis por 2 existem de 1 a 100?

- a. 2 b. 25 c. 50 d. 100
- 9) A fórmula da resolução de equações do 2º grau recebe o nome de qual matemático indiano?
- a. Gandhi b. Bhaskara Akaria c. Al-Khowarizmi d. Pitágoras
- 10) O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se:
- a. Bissetriz b. Cateto c. Mediatriz d. Hipotenusa
- 11) Maria nasceu quando João tinha 4 anos, depois de 17 anos, qual a diferença de idade entre os dois?
- a. 13 b. 21 c. 17 d. 4
- 12) Como são chamados os ângulos cuja soma totaliza 360 graus?
- a. Replementares b. Suplementares c. Complementares d. Congruentes
- 13) Qual o nome da reta que divide um ângulo em outros dois ângulos iguais?
- a. Mediana b. Bissetriz c. Mediatriz d. Altura
- 14) Que conjunto numérico resulta da intersecção do conjunto dos números Reais com o conjunto dos números Racionais:
- a. Naturais b. Inteiros c. Racionais d. Reais
- 15) Qual o único número par que também é primo?
- a. 4 b. 6 c. 8 d. 2
- 16) O paralelogramo que tem somente quatro ângulos retos é um...
- a. Losango b. Retângulo c. Quadrado d. Trapézio
- 17) Como se chamam as retas que se cruzam sem formar um ângulo reto?
- a. Paralelas b. Perpendiculares c. Concorrentes d. Congruentes
- 18) Um quadrado com perímetro de 36 metros possui lados de:
- a. 9 metros b. 6 metros c. 4 metros d. 10 metros
- 19) Do nascimento até 5 anos uma criança cresceu em média 8cm por ano. Se ela nasceu com 48cm, aos 5 anos ela tem?
- a. 88 cm b. 86 cm c. 84 cm d. 90 cm
- 20) Um quadrado com área de 36 metros quadrados tem lados de:
- a. 9 metros b. 4 metros c. 6 metros d. 5 metros
- 21) Dado o valor de $b = 16$, qual o valor de x na expressão $x + b = 20$?
- a. 4 b. 16 c. 2 d. 36
- 22) Na matemática qual o valor aproximado de π ?
- a. 3,1514 b. 3,1415 c. 3,9999 d. 3,1555
- 23) Que número positivo que multiplicado por ele mesmo é igual a 121?

38) Minhas aulas começam a sete e terminam as treze. Se tenho 30 minutos de recreio, quantas horas de aula eu tenho?

- a. 4,5 b. 5 c. 5,5 d. 6

39) Que conjunto numérico resulta da união do conjunto dos números reais com o conjunto dos números naturais?

- a. Naturais b. Inteiros c. Racionais d. Reais

40) Numa sala têm quatro gatos, cada canto tem um gato, cada gato vê três gatos. Quantos gatos existem na sala:

- a. 12 b. 1 c. 4 d. 16

(40 minutos)

Finalizaremos o encontro sem lista de exercícios para casa pois não haverá um novo encontro para correção deles.

Avaliação:

Iremos avaliar os alunos conforme sua participação na atividade investigativa. Por fim, também usaremos os resultados do Kahoot e compararemos de forma de grupo seus resultados com as anotações feitas do resultado do jogo Show do milhão. Por este podemos encontrar uma mediação entre os resultados como parte de uma investigação do diagnóstico formativo por meios de atividades lúdicas possam ter ajudado a construir aulas com enfoque no conhecimento prévio do aluno e seus melhores métodos de aprendizado.

Relatório da aula ministrada – 05/07/2025

No dia 07 de julho de 2025, começamos a aula às 8h05min com 14 alunos presentes e a turma disposta com as carteiras em “meia-lua”. Inicialmente, corrigimos dois exercícios das listas anteriores e tiramos dúvidas relacionadas à lista do encontro anterior sobre equações. Os exercícios corrigidos foram feitos de forma bem detalhada, e um deles, foi feito por um aluno na lousa. Após a resolução apresentada pelo aluno, os estagiários resolveram de uma forma diferente para apresentar outro tipo de solução.

As 08:30h, questionamos os alunos se eles gostariam que nós retomássemos o exercício que ficou incompleto na aula anterior de forma rápida – apenas corrigindo a questão que faltava – ou se retomássemos de forma detalhada, fornecendo mais um tempo para que eles investigassem o problema. A escolha da maioria foi de

retomar de forma detalhada e com isso, destinamos o restante da aula até o período do intervalo para que eles desenvolvessem a atividade enquanto auxiliávamos as duplas nas dúvidas e questionamentos.

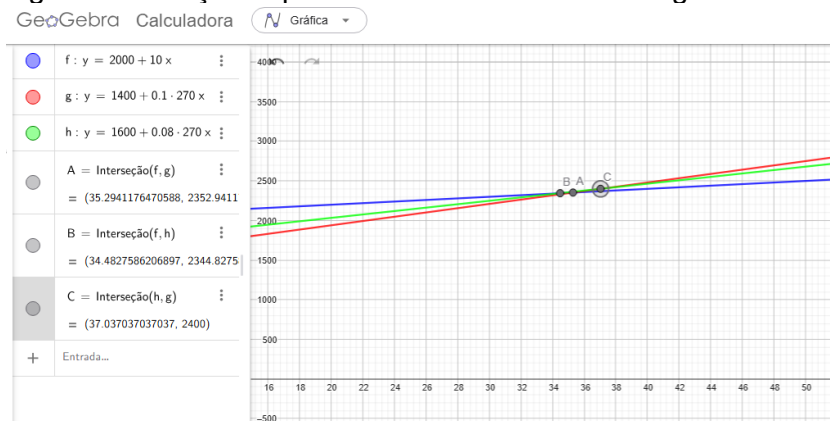
Os alunos desenvolveram a atividade de acordo com o esperado, mas em contrapartida, não esperávamos demandar tanto tempo para a atividade que seria do encontro anterior. Após o intervalo, o exercício foi corrigido no quadro e os alunos compartilharam suas respostas e formas de resolução.

Ademais, a atividade investigativa acerca de função afim foi entregue aos alunos. Em suma, a atividade atendeu nossas expectativas quanto ao interesse dos alunos para resolvê-la. Entretanto, no decorrer da atividade, foi necessário retomar vários conceitos já trabalhados em encontros anteriores, como fração e porcentagem.

Após discutirmos os resultados e as formas que resolvemos, conceituamos algumas especificidades sobre função de primeiro grau e mostramos no *Software Geogebra* (como mostrado na figura abaixo) o comportamento de cada função trabalhada. Sentimos que deveríamos ter trabalhado mais sobre o conteúdo de função afim, mas foi observado também que a atividade retomada sobre trinômios teve proveito por parte dos alunos.

Por fim, para encerrar o encontro, entregamos algumas atividades que poderiam finalizar em casa e tirar dúvidas através do contato por *WhatsApp*, caso tivessem. Informamos também sobre como seria o próximo encontro e ajustamos os detalhes para o lanche que cada um deveria se programar para trazer. Com isso, agradecemos a presença de cada um e nos despedimos.

Figura 61: Funções apresentadas no Software Geogebra



Fonte: Acerto dos autores, 2025

Nossa abordagem nesta aula não teve muito sucesso, pela questão de falta de planejar o tempo de cada atividade brevemente, assim possibilitando um

encaminhamento mais adequado aos nossos objetivos quanto ao conteúdo a ser abordado. Poderíamos ter escolhido não retomar conteúdos passados para não atrasar a seguinte aula, isso desfavoreceu o aprendizado dos estudantes e acarretou uma perda parcial do planejamento.

Por outro lado, podemos verificar que tivemos um maior sucesso em explorar exemplos juntos com os alunos no *Geogebra*, isso gerou uma participação significativa dos alunos e possibilitou um entendimento maior quanto o conteúdo de funções. Em contrapartida, tivemos dificuldades em abordar a atividade investigativa e impossibilitou o desempenho completa da atividade, além de confundir os alunos em alguns aspectos. No geral, esta aula não teve um bom encaminhamento, teríamos que rever diversos parâmetros de nossa abordagem e adquirir mais conhecimento para construir uma aula mais aperfeiçoada para o aprendizado dos estudantes, considerando que aprendemos mais que os mesmos, em relação ao que não fazer.

AULA 10 (12/07/2025) - PLANO DE AULA

Plano de Aula – Dinâmica Final - 12/07/2025

Estagiários: Clícia Luiza Paza, Gabriel Talini da Silva, Pedro Gabriel Ferreira Anzolin.

Público-alvo: Alunos do Ensino Médio e ingressantes do Ensino Superior.

Objetivo geral: Retomar o conteúdo de expressões e poliedros e verificar o desempenho dos alunos nas atividades propostas.

Objetivos específicos:

- Explorar as quatro operações básicas e outras (potência, fatorial, raiz) de forma criativa;
- Desenvolver raciocínio lógico, argumentação e flexibilidade cognitiva;
- Trabalhar prioridade de operações e uso de parênteses;
- Identificar componentes de poliedros, como arestas, faces
- Incentivar o trabalho em grupo e a resolução de problemas abertos.

Conteúdo: Expressões numéricas e geometria espacial.

Tempo de execução: Um encontro com duração de 3 horas e 20 minutos.

Recursos didáticos: Materiais impressos, materiais manipuláveis.

Encaminhamento metodológico:

O jogo Quatro Quatros será aplicado aos grupos com duração de máximo 10 minutos, com o objetivo de explorar as quatro operações básicas e outras (potência, fatorial, raiz) de forma criativa, desenvolver raciocínio lógico, argumentação e flexibilidade cognitiva, trabalhar prioridade de operações e uso de parênteses, além de incentivar o trabalho em grupo e a resolução de problemas abertos com autonomia. O Quatro Quatros consiste em formar números naturais usando exatamente quatro vezes o algarismo 4, combinados com quaisquer operações matemáticas permitidas, estimulando o raciocínio lógico-matemático (Resnick, 1987), a flexibilidade cognitiva e criatividade matemática (Silver, 1997), a conversão de registros semióticos (Duval, 2003), pois envolve representação numérica e simbólica, e a aprendizagem significativa (Ausubel, 2000), ao conectar operações a problemas concretos.








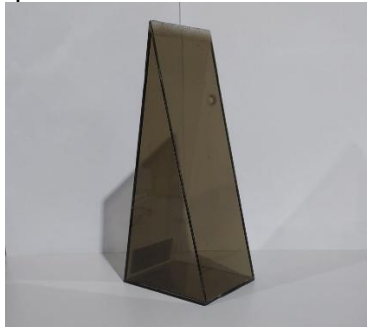

Os grupos já estarão formados previamente pelos alunos do Promat, compostos por estudantes das diferentes turmas, conforme organização da equipe, devendo chegar à sala, sentarem-se juntos e organizarem seu material de anotação (caderno, lápis). Os professores irão acolher os grupos, dando boas-vindas e destacando a importância do trabalho colaborativo e respeitoso, explicando claramente o jogo Quatro Quatros com um exemplo projetado ou escrito no quadro, como $\frac{4+4}{4+4} = 1$, reforçando as regras principais: utilizar exatamente quatro vezes o número 4 e apenas as operações matemáticas previamente autorizadas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, fatorial). Será explicado que os professores não ajudarão durante a execução, pois o objetivo é desenvolver autonomia, criatividade e raciocínio lógico.

Durante o desenvolvimento, cada grupo deverá tentar formar o maior número de soluções possíveis, seguindo a ordem natural (1, 2, 3, ...), conforme a dinâmica definida, registrando todas as soluções em uma folha única do grupo, escrevendo a expressão matemática completa e legível, organizando as resoluções para posterior conferência pelos professores. Os professores devem circular apenas para observar e garantir que todos estejam participando, sem interferir nas soluções. O grupo que realizar mais soluções corretas no menor tempo será reconhecido no fechamento como destaque.

(15 minutos)

Dinâmica de identificar os poliedros

Tabela 9: Descrição de cada poliedro

<p>Figura 62: Dodecaedro</p>  <p>F:12 A: 30 V: 20</p>	<p>Figura 63: Tronco de pirâmide</p>  <p>F:6 A:12 V:8</p>	<p>Figura 64: Prisma retangular</p>  <p>F:10 A:24 V:16</p>
<p>Figura 65: Octaedro</p>  <p>F:8 A:12 V:6</p>	<p>Figura 66: Pirâmide de base pentagonal</p>  <p>F:6 A:10 V:6</p>	<p>Figura 67: Pirâmide de base triangular</p>  <p>F:4 A:6 V:4</p>
<p>Figura 68: Icosaedro</p>  <p>F:20 A:30 V:12</p>	<p>Figura 69: Pirâmide de base quadrada</p>  <p>F: 5 A: 9 V: 6</p>	<p>Figura 70: Paralelepípedo retângulo</p>  <p>F: 6 A: 12 V: 8</p>

Avaliação:

Nessa aula a avaliação será feita ao final do encontro, analisando o desempenho de cada o grupo, para que possa se atingir um grupo ganhador juntamente com as dinâmicas feitas por outras turmas.

Relatório da aula ministrada 12/07/2025

No dia 25 de julho de 2025, foi realizado o décimo e último encontro do Promat, dando continuidade às atividades do projeto e finalizando este ciclo de encontros. Um dos professores chegou primeiro e organizou as carteiras para o desenvolvimento dos dois jogos que seriam abordados na nossa sala: o jogo “4 quatros” e a dinâmica sobre poliedros. Os alunos foram chegando aos poucos e se acomodando. Logo após, os demais professores chegarem e, às 8h, iniciamos os avisos, contando com a presença de 12 alunos.

Nesse encontro, o foco esteve voltado para jogos e dinâmicas envolvendo raciocínio lógico, geometria espacial e relações poliedrais. Nosso grupo ficou responsável pelo desenvolvimento de duas dinâmicas, uma sobre expressões algébricas e outra sobre geometria espacial, disso resolvemos trabalhar com o jogo “4 quatros” e uma atividade na qual os alunos deveriam identificar vértices, arestas e faces de determinados poliedros.

Após os avisos, orientamos os alunos para que seguissem até outra sala, onde formariam grupos com estudantes de outras turmas. Enquanto isso, os professores finalizaram a organização do ambiente e discutiram alguns acordos previamente combinados. Ao retornarem, os alunos já estavam divididos em dez grupos e se acomodaram nas carteiras dispostas para as atividades.

Dois professores estagiários ficaram responsáveis pelo jogo “quatro quatros” e pela comunicação com as outras salas, enquanto outra professora estagiária conduziu a dinâmica dos poliedros. Inicialmente, estava previsto que cada dinâmica teria dois minutos de explicação e 10 minutos de resolução, mas, devido a reclamações sobre o barulho no espaço, houve mudança. Passou-se a dar apenas um aviso geral e, conforme os grupos compreendiam, um professor explicava o jogo “quatro quatros” e outro o problema sobre a relação de Euler, enquanto o terceiro atuava como mediador, garantindo organização e acompanhamento contínuo.

Cada grupo desenvolveu as atividades por aproximadamente 12 minutos antes da troca de dinâmica, repetindo esse processo até que todos passassem pelos dois jogos, totalizando 10 rotações, correspondentes ao número de grupos existentes. Esse momento foi muito dinâmico e passou rapidamente, com a maioria dos alunos se envolvendo e compreendendo bem os objetivos, embora o desempenho variasse entre eles.

Ao final das atividades, foi realizado o momento do lanche, em que todos compartilharam diversos tipos de comidas típicas de festas julinas, trazidas pelos próprios alunos. Esse momento foi marcado por harmonia, interação, conversas, risos e troca de experiências, fortalecendo o vínculo entre eles.

Após o lanche, todos se reuniram em uma única sala para tirar fotos, ouvir os avisos finais e o anúncio do grupo vencedor – aquele que obteve o maior desempenho em todas as dinâmicas realizadas nas diferentes salas. Esse momento foi especial e demonstrou que o Promat conseguiu unir diferentes pessoas em experiências que jamais se apagarão, podendo ser momentos de aprendizado significativo para todos os envolvidos.

Por fim, os professores agradeceram a presença de todos e convidaram os alunos a retornarem nas próximas edições do Promat, encerrando oficialmente o décimo e último encontro do curso.

Para nossa avaliação como professores estagiários, nesta aula, consideramos que foi uma aula diferente das demais, e assim, tivemos algumas particularidades e dificuldades em planejar a decisão de quais dinâmicas abordaríamos e como dividiríamos o encaminhamento. Isso acarretou uma falta de organização e pequenos equívocos na condução dos primeiros grupos; porém, com o decorrer das atividades, conseguimos adequar nossas explicações da melhor maneira possível, para o entendimento dos estudantes.

Em relação às atividades, pudemos observar que houve um bom engajamento e consideramos que os alunos gostaram das dinâmicas, pela boa participação e envolvimento de quase todos os integrantes dos grupos. Também conseguimos sanar as dúvidas que surgiam durante as execuções, quando necessário explicando mais de uma vez. Encerramento realizado com sucesso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso estágio relatado no presente documento reflete o trabalho desenvolvido durante a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática, em particular durante o Promat (Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas). As aulas ministradas ao longo dos dez encontros demonstraram a importância da Investigação Matemática no ensino da matemática, proporcionando aos estudantes uma nova visão da matemática como um todo.

No decorrer dos encontros, verificamos que estava se tornando maçante, para nós, quanto estagiários, e isto, evidenciou um certo cansaço. Nesse contexto, algo que podemos ressaltar, é que há muitos fatores que permeiam a vida acadêmica, e ter a disponibilidade de estagiar em dez sábados consecutivos é desafiador.

No contexto do nosso trio, tínhamos outras responsabilidades além da disciplina de Metodologia, e para conciliar nosso tempo para a preparação dos planos de aula foi necessário priorizar momentos para isso. Embora todos os planos tenham sido cuidadosamente elaborados e analisados, nem sempre estávamos totalmente dispostos ou com energia para lecionar durante toda a manhã, devido a situações pontuais que surgiram ao longo do processo.

No decorrer dos dez encontros do Promat, puedemos verificar a necessidade de preparação antecipada das aulas, embora as dificuldades, em grande parte dos encontros, obtivemos um certo sucesso em nossas estratégias. Aqueles encontros que conseguimos nos planejar, discutir e repassar o conteúdo, certamente a nossa performance foi melhor, já aqueles que não tínhamos estudado com tanto afinco, tivemos muita dificuldade no encaminhamento da aula e, às vezes, ficamos perdidos.

Para evidenciar isso, podemos citar o oitavo encontro, que foi construído em torno da ideia de um dos estagiários, e assim, no geral, não tínhamos uma autoridade conjunta e isso fez com que a aula se tornasse menos desenvolvida. Em contrapartida, tivemos uma boa atuação, tanto nos encontros que realizamos uma abordagem tradicional, quanto nos encontros que trabalhamos com investigação, isso pode ser caracterizado pela boa comunicação entre os colegas, durante as aulas, e o compartilhamento da atuação e suporte em abordagens “insuficientes” e informais.

Em suma, pudemos explorar muitas ideias e adquirir um aprendizado significativo, bem como compartilhar experiências uns com os outros. Com o Promat

conseguimos abranger nossos conhecimentos e nossa percepção quanto professores, certamente, uma experiência valiosa para nossa formação e, conseqüentemente, necessária que levaremos para nossa prática pedagógica futura.

REFERÊNCIAS

ASTH, R. C. **Conjuntos numéricos**. Disponível em: <https://www.significados.com.br/conjuntos-numericos/>. Acesso em: 16 mai. 2025.

AMORIM, M. V. dos S.; LIMA, L. F. de. Abordagem Dialógica e investigativa: uma possibilidade de trabalho com polinômios. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-11. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7151_3564_ID.pdf. Acesso em: 31 jul. 2025.

AMORIM, M. V. dos S.; LIMA, L. F. de. **Abordagem dialógica e investigativa**: uma possibilidade de trabalho com polinômios. In: XII ENEM. São Paulo: SBEM, 2016.

ARAÚJO, E. A. **O jogo “O teu e o meu” para auxiliar a formação do pensamento algébrico**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Campinas, 2004.

ASTH, R. **Exercícios de razão e proporção**. TODA MATÉRIA, 2013. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/razao-e-proporcao-exercicios/>. Acesso em: 27 mai. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 23 mai. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 7 mai. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Cadernos da formação: matemática – geometria**. Brasília, DF: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRAUMANN, C. A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P. da Costa, C. ROSENDO, A. I. MAIA, E. FIQUEIREDO, N. DIONÍSIO, A. F. **Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002, p. 5-24. Disponível em: <https://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2002.pdf>. Acesso em 31 jul. 2025.

CHARLEAUX, M.; SOUZA, A. C. de. Ensinando geometria por meio de atividades investigativas. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 89–103, 2019. DOI:10.34179/revisem.v4i2.11373. Disponível em: <https://periodicos.ufs.br/ReviSe/article/view/11373>. Acesso em: 11 jun. 2025.

DANTE, L. R. **Matemática: 7ª série**. São Paulo: Ática, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. **Novo Matemática na medida certa: 5ª série – Professor**. São Paulo: Scipione, 2021.

DANTE, L. R. **Tudo É Matemática**. 6º Ano. 3 ed. São Paulo: Ática, 2008.

DELTA *In*: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. [São Francisco, CA: Wikimedia Foundation, 2016]. Disponível em: <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Deltaedro>. Acesso em: 4 jun. 2025.

DOLCE, O.; POMPEO J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9**: geometria plana. São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 5, n. 1, p. 7-30, São Paulo, 2003.

EDITORA MODERNA. **Matemática**: construção e significado. São Paulo: Moderna, 2008.

ESTRATÉGIA VESTIBULARES. **Cálculo da área de um trapézio em questão ambiental**, 2025. Disponível em: <https://vestibulares.estrategia.com/public/questoes/trapezio-ABCD-foi3518fd0663>. Acesso em: 11 jun. 2025.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FONSECA, H. BRUNHEIRA, L. PONTE, J. P. da. As Atividades de Investigação, o Professor e a Aula de Matemática. *In*: **Atas do ProfMat 99**. Portimão, 1999, p. 1-13. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/254647012_As_actividades_de_investigacao_o_professor_e_a_aula_de_Matematica. Acesso em 31 jul. 2025.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro, 1987.

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática: 7º ano** (coleção A Conquista da Matemática). Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GIOVANNI, J. R. **Novo Matemática na Medida Certa: 6ª Série** (professor). São Paulo: Scipione, 2021.

GREGORUTTI, J. de L. **O que são equações do 1º grau?**. NOVA ESCOLA: 2018.

HUBERMAN, M. *et al.* O ciclo de vida profissional dos professores. *In*: NÓVOA, A. **Vidas de professores**. Porto: Porto, 1992. p. 31-61.

IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar, 1**: conjuntos e funções. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O. **Matemática e realidade: 6º ano**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

IEZZI, G; MUARAKAMI C. **Fundamentos da matemática elementar, 1**: conjuntos e funções. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

LUIZ, R. **Diagrama de Venn**. BRASIL ESCOLA, 2019. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/diagrama-de-venn.htm>. Acesso em: 16 mai. 2025.

LUIZ, R. **Diagrama de Venn**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/diagrama-de-venn.htm>. Acesso em: 16 mai. 2025.

MARCIANO, E. **Grandezas diretamente e inversamente proporcionais**. Escola Educação, 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/grandezas-diretamente-e-inversamente-proporcionais/>. Acesso em: 27 mai. 2025.

MARCIANO, E. **Soma dos ângulos internos e externos de um polígono convexo**. Escola Educação, 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/soma-dos-angulos-internos-e-externos-de-um-poligono-convexo/>. Acesso em: 4 jun. 2025.

MARCIANO, E. **Exercícios sobre razão e proporção**. Escola Educação, 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/exercicios-sobre-razao-e-proporcao/>. Acesso em: 27 mai. 2025.

MARCIANO, E. **Exercícios sobre razão e proporção**. Escola Educação, 2020. Disponível em: <https://escolaeducacao.com.br/exercicios-sobre-razao-e-proporcao/>. Acesso em: 27 mai. 2025.

MARCIANO, E. **Polígonos**. LER E APRENDER, 2020. Disponível em: <https://lereaprender.com.br/poligonos/>. Acesso em: 4 jun. 2025.

MELO, L. A. C. P. de. **Completando quadrados para resolver equações quadráticas**. NOVA ESCOLA: 2018.

MELO, L. A. C. P. de. **Dedução da fórmula da equação quadrática**. NOVA ESCOLA: 2018.

MELO, L. A. C. P. de. **Reconhecendo uma equação quadrática**. NOVA ESCOLA: 2018.

MELO, L. A. C. P. de. **Resolvendo equações quadráticas por fatoração**. NOVA ESCOLA: 2018.

MENDES, I. A. **Matemática e Investigação na sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Editora Livraria da Física: São Paulo, 2009.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie Aparecida Fortes. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2009.

NASCIMENTO, R. A. do; QUARTIERI, M. T. Investigação Matemática: possibilidade para o ensino de função do 1º grau. *In: Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v. 13, n. 2, 2020, p. 133–144. Disponível em: <<https://jjeem.pgsscogna.com.br/jjeem/article/view/7036/5560>>. Acesso em: 31 jul. 2025.

NASCIMENTO, R. A. do; QUARTIERI, M. T. Investigação Matemática: Possibilidade para o Ensino de Função Polinomial do 1º Grau. *JIEEM* v.13, p133-144, 2020. Disponível em: <<https://funes.uniandes.edu.co/wpcontent/uploads/tainacanitems/32454/1202742/Araujo2020Investiga25C325A725C325A3o.pdf>>. Acesso em: 31 jul. 2025.

OLIVEIRA, R. R. de. **Enem: lista de exercícios sobre razão e proporção**. UOL, 2019. Disponível em: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/enem-lista-de-exercicios-sobre-razao-e-proporcao.htm>. Acesso em: 27 de mai. de 2025.

OLIVEIRA, R. R. de. **O que é semelhança de triângulos?**. Brasil Escola, 2025. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-semelhanca-triangulos.htm>. Acesso em 13 jun. de 2025.

OLIVEIRA, R. R. de. **Propriedades do Triângulo Equilátero**. Mundo Educação, 2025. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/propriedades-triangulo-equilatero.htm>. Acesso em: 13 jun. 2025.

OLIVEIRA, R. R. de. **O que são conjuntos numéricos?** BRASIL ESCOLA, 2025. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-conjuntos-numericos.htm>. Acesso em: 16 mai 2025.

OLIVEIRA, R. R. de. **Triângulos: tipos, área, altura, perímetro**. PrePara ENEM, 2025. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/triangulos.htm>. Acesso em: 13 jun. 2025.

OLIVEIRA, R. **Razão e proporção**. UOL, 2023. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/razao-proporcao.htm>. Acesso em: 27 mai. 2025.

PASSERINI, G. A. **O estágio supervisionado na formação inicial do professor de matemática na ótica de estudantes do curso de licenciatura em matemática da UEL.** 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007. p. 24-25.

PINTO, L. **Escala, Razão e proporção.** APLUS, 2024. Disponível em: <https://aplusplatform.com/escala-razoas-proporcoes/>. Acesso em: 27 mai. 2025.

PONTE, J. P. M. da. Investigar, ensinar e aprender. *In: Actas do ProfMat 2003.* Lisboa, 2002, pp. 25-39. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%20a%20prender.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2025.

PROJETO AGATHA EDU. **Banco de Questões Gratuito.** 2025. Disponível em: <https://projetoagathaedu.com.br/banco-de-questoes.php>. Acesso em: 20 jun. 2025.

RABELO, R. **Função de 1º grau.** 2020. Apostila didática. Disponível em: <https://encurtador.com.br/ilnoG>. Acesso em: 3 jul. 2025.

REDLING, J. P.; LOPES Jr, J. As Mudanças Procedimentais De Alunos Do Ensino Médio Durante O Trabalho Com Investigação Matemática Em Sala De Aula. **Trilhas Pedagógicas**, p. 122-139, 2011.

SILVA, J. D.; FERNANDES, S.; MABELINI, O. D. **Caderno do Futuro:** Matemática. São Paulo, 2013.

SILVA, L. P. M. **O que são conjuntos numéricos?** Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-conjuntos-numericos.htm>. Acesso em: 16 mai. 2025.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 13, n. 14, 2000, p. 66–91. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635/7022>. Acesso em: 31 jul. 2025.

TAHAN, M. **O homem que calculava.** 51. ed. São Paulo: Record, 1999.